

Correction DM n°5

Exercice 1.

- 1) Soit $P \in E$, $Q \in E$, et λ, μ deux réels.

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_0); (\lambda P + \mu Q)(x_1); \dots; (\lambda P + \mu Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_0) + \mu Q(x_0); \lambda P(x_1) + \mu Q(x_1); \dots; \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)) \\ &= \lambda(P(x_0); P(x_1); \dots; P(x_n)) + \mu(Q(x_0); Q(x_1); \dots; Q(x_n)) \\ &= \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire.

- 2) Soit $P \in \text{Ker}(\phi)$.

Par définition de ϕ , on a donc $P(x_0) = P(x_1) = \dots = P(x_n) = 0$.

Donc P possède $n + 1$ racines réelles distinctes.

Or P est de degré inférieur ou égal à n : donc P est le polynôme nul.

Donc $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Donc ϕ est injective.

Comme de plus $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1$, ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

- 3) Par définition des bijections, d'après la question précédente, on peut donc affirmer que

$$\text{pour tout } (y_0; y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ il existe un unique polynôme } P \in E \text{ tel que } \phi(P) = (y_0; y_1; \dots; y_n).$$

- 4) Considérons le système

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \lambda_0 + x_0\lambda_1 + x_0^2\lambda_2 + \dots + x_0^n\lambda_n = y_0 \\ \lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_1^2\lambda_2 + \dots + x_1^n\lambda_n = y_1 \\ \vdots \\ \lambda_0 + x_n\lambda_1 + x_n^2\lambda_2 + \dots + x_n^n\lambda_n = y_n \end{cases}$$

d'inconnues $(\lambda_0; \lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

La première ligne peut se réécrire $P(x_0) = y_0$ où $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_n X^n$.

De même, la seconde ligne peut se réécrire $P(x_1) = y_1$, la troisième $P(x_2) = y_2$, etc...

Finalement, le système est une réécriture de $\phi(P) = (y_0; y_1; \dots; y_n)$.

Or d'après la question précédente, pour tout $(y_0; y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $\phi(P) = (y_0; y_1; \dots; y_n)$.

Donc ce système possède une unique solution.

- 5) Considérons le système

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = y_0 \\ x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \dots + x_n\lambda_n = y_1 \\ \vdots \\ x_0^n\lambda_0 + x_1^n\lambda_1 + x_2^n\lambda_2 + \dots + x_n^n\lambda_n = y_n \end{cases}$$

d'inconnues $(\lambda_0; \lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On peut l'écrire sous forme matricielle $A\Lambda = Y$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est le vecteur inconnu et } Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Or on a vu à la question précédente que $\mathcal{S}_1$ possède une unique solution.

Et $\mathcal{S}_1$ s'écrit matriciellement $A^T \Lambda = Y$.

Donc A^T est une matrice inversible, donc A est aussi inversible, donc $\mathcal{S}_2$ possède une unique solution.

6) **Application numérique** : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On reconnaît une matrice du même type que celle intervenant dans le système $\mathcal{S}_1$ de la question 4, en posant $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

Donc A est inversible.

Calculons A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 4 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 3 & y-x \\ 0 & -2 & 0 & z-x \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 6 & 2y-2x+z-x \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 4 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x - \frac{x-z}{2} - \frac{2y-3x+z}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-z}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2y-3x+z}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 4), l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = -1$ et $P(-1) = 1$ est le polynôme $P = a + bX + cX^2$ où a, b, c sont les solutions de

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1/2 \\ -7/6 \end{pmatrix}.$$

Donc l'unique polynôme solution est $P = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}X - \frac{7}{6}X^2$.

De même, le système $\begin{cases} u + v + w = 2 \\ u + 2v - w = -1 \\ u + 4v + w = 1 \end{cases}$ est associé à A^T donc son unique solu-

tion est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

- 7) Soit $F = R_2[X]$ et $\psi : \begin{cases} F \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(0); P'(0); P(1)) \end{cases}$

De la même manière que dans les trois premières questions, on montre que ψ est linéaire, puis que son noyau est réduit au polynôme nul.

$$\text{En effet, soit } P = a + bX + cX^2, \psi(P) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases} \text{ ce qui conduit}$$

immédiatement au résultat.

On en déduit, comme $\dim(F) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, que ψ est un isomorphisme, donc pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique polynôme P tel que $\psi(P) = (u; v; w)$.

- 8) Application numérique :

- Pour $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(1) = 3$, on trouve immédiatement $P = 1 + 2X$.
- Pour $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 1$ et $Q(1) = 2$, on trouve immédiatement $Q = X + X^2$.

Exercice 2.

- 1) Pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ d'une part, et que $x \neq 0$ d'autre part.

Or, $\forall x > 0, e^x > 1$ (car exp est strictement croissante), et $\forall x < 0, e^x < 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

- 2) Pour montrer que f se prolonge continûment en 0, calculons la limite de $f(x)$ en 0.

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 + x + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x) - 1}{x} \right) = \ln \left(1 + \frac{o}{x \rightarrow 0}(1) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

- 3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\frac{xe^x - (e^x - 1) \times 1}{x^2}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{(x - 1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}.$$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Calculons la limite de la dérivée en 0 :

$$\frac{(x - 1)e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{-1 + x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^2) + 1}{x^2 + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{o}{x \rightarrow 0}(1)}{1 + \frac{o}{x \rightarrow 0}(1)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc d'après le théorème de limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- 4) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 1)e^x + 1$.

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

Étudions les variations de g , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$ qui est du signe de x .

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et passe donc par un minimum global en 0.

Or $g(0) = -1 + 1 = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

- 5) D'après les deux questions précédentes, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque f' est du signe de son numérateur g (car x et $e^x - 1$ sont de même signe comme nous l'avons vu à la question 1) qui est strictement positif sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'annule qu'en 0.

On a donc le tableau de variations suivant :

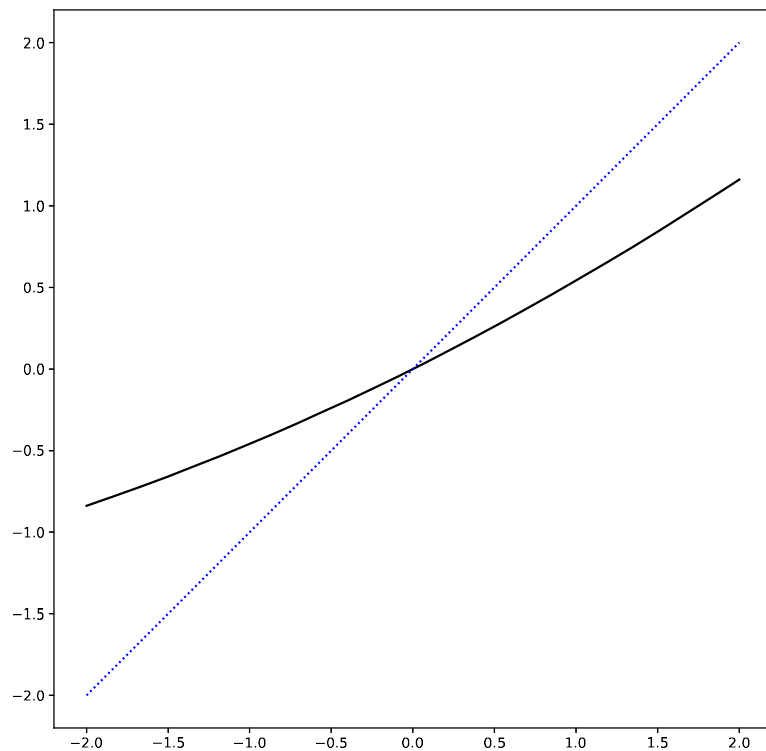
Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de f'		$\oplus$	$\oplus$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- 6) Résolvons l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : f(x) \leq x$

$$\begin{aligned}
 f(x) \leq x &\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \quad \text{car exp est strictement croissante bijective} \\
 &\Leftrightarrow \frac{e^x(1 - x) - 1}{x} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-g(x)}{x} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \geq 0
 \end{aligned}$$

Donc $f(x) \leq x$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$.

7)



Partie B : Étude de la suite u

- 8) Supposons $u_0 > 0$. Alors, d'après les questions 4) et 6), $u_1 = f(u_0) < u_0$. Par ailleurs, d'après la question 5), $u_1 = f(u_0) > 0$.

Ceci initialise la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < u_n$.

Hérédité : supposons que pour un entier n donné, on ait $0 < u_{n+1} < u_n$.

Alors, f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_*$, on a $f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Donc $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$.

La propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Notamment, si $u_0 > 0$, u est strictement décroissante, minorée par 0, donc convergente.

- 9) De même, si $u_0 < 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} < 0$.

Notamment u est dans ce cas strictement croissante, majorée par 0, donc convergente.

- 10) Donc, quelle que soit la valeur de u_0 , u converge.

Or f est continue sur $\mathbb{R}$, donc u converge vers un point fixe de f . Or d'après les questions 4) et 6), le seul point fixe de f est 0.

Donc, $\forall u_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 11) On sait que $u_0 \neq 0$.

On a donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\text{Or } u_{n+1} = f(u_n) = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n + \frac{u_n^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2)}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_n}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)\right).$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}.$$