

Matrices

I. Interprétations géométriques des matrices

Ex. 18.1 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (3x - y; -x) \end{cases}$ et $\mathcal{B} = ((1; 1); (-1; 2))$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}$ en est une base.
2. Donner la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.2 Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Montrer que s est une symétrie dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.

Ex. 18.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\Delta : P \in E \mapsto P'$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.

1. Montrer que Δ et ϕ sont des endomorphismes de E et donner leur matrice dans la base canonique.
On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\Delta)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ ces matrices.

2. Que peut-on dire de $\Delta^4 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta$?

3. Dédurre de la question précédente que :

- A n'est pas inversible ;
- B est inversible - on donnera l'inverse de B sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

II. Isomorphismes et changements de bases

Ex. 18.4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Ex. 18.5 $[**]$ $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. Ce résultat se généralise-t-il aux matrices telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda AB = A + B$?

Ex. 18.6 Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N .

1. Déterminer la nature géométrique de ψ .
2. En déduire N^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 18.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés aux bases $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1; f_2; \dots; f_n)$.
Soit $\phi : E \rightarrow F$ dont la matrice est

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer, pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\phi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
2. On pose $S_j = \sum_{k=1}^j f_k$. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ on a $\phi(e_{j+1}) = \phi(e_j) + S_{j+1}$.
3. En déduire une expression de $\phi(e_j)$ comme une somme double.

4. Montrer que $\phi(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
5. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .

III. Matrices de changement de bases

Ex. 18.8 Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = (X^2 + 1; X^2 + iX; X^2 - iX)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
2. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = (X^k(1 - X)^{n-k})_{k \in [0, n]}$.
On note P_k les polynômes de $\mathcal{B}$.

1. Simplifier $S_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$ puis $S_1 = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} P_k$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
3. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-7}{2}u_n + 6v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 5v_n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2 .
2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n .
3. Soit $Q = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à Q .
Soit $\mathcal{B} = ((3; 2); (4; 3))$.

- Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

- En déduire une expression simple de Q^n .
4. À l'aide des deux questions précédentes, expliciter W_n en fonction de n .
 5. Montrer que les suites u et v convergent et donner leurs limites.

IV. Noyau, image et rang

Ex. 18.11

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une base de $\text{Ker } f$, une base de $\text{Im } f$ et le rang de A .
2. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base et un système d'équations de $\text{Ker } g$, une base et une équation de $\text{Im } g$ et le rang de B .

Ex. 18.12 Soit A une matrice réelle d'ordre n et de rang 1.

1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^T$.
2. En déduire A^k en fonction de A pour $k \geq 1$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A + I_n$ soit inversible et exprimer alors son inverse en fonction de A .

Ex. 18.13 (Cor.) Soient $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de la matrice $((i + j + p)^2)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$?

V. Divers

Ex. 18.14 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique, $\mathcal{B} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et

$$\phi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ P & \mapsto \sum_{k=0}^3 P(k)X^k = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 + P(3)X^3 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Donner $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.
3. Donner $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
4. Donner $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\phi)$.
5. Quelle formule relie les matrices A , B et P ?
6. Déduire des questions précédentes que ϕ est bijective.
7. Ce résultat peut-il se généraliser ?

Ex. 18.15 *Extrait   crit Centrale Math 1 2018* Soient n un

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

entier supérieur à 2, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M =$

$$A(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t_n \\ t_n & \ddots & \ddots & t_{n-1} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ t_3 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ t_2 & t_3 & \dots & t_n & t_1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Calculer M^2 , ..., M^n . Montrer que M est inversible, donner M^{-1} .

2. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P(M) = 0$.

3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q_A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A(t_1, t_2, \dots, t_n) = Q_A(M)$.

4. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer à l'aide d'une division euclidienne de Q par un polynôme bien choisi qu'il existe $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Q(M) = A(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

5. Montrer que $\mathcal{D}_n = \{A(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et transposition.

6. Donner une base de $\mathcal{D}_n$ ainsi que sa dimension.

Ex. 18.16 (Cor.) On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto \int_{X-1}^X P(t)dt \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.
3. En déduire Φ est un automorphisme d'espaces vectoriels.
4.   tant donné $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par Φ_n . Les polynômes P_k sont appelés **polynômes de Bernoulli**.

Calculer les quatre premiers polynômes de Bernoulli.

5. Démontrer que pour tout $n, N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^N k^n = \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

6. Que vaut $\sum_{k=1}^N k^3$?

Corrections

Cor. 18.13 : Soit $A = ((i+j+p)^2)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq p \leq n}}$.

Soient i et j deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.
 $(i+j+p)^2 = i^2 + 2 \times i \times j + j^2 + 2(i+j)p + p^2 = (j^2 + 2jp + p^2) + i \times (2j + 2p) + i^2$.
 Notons $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$ les colonnes de A de sorte que $A = (A_1 | \dots | A_n)$.

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice à une colonne et n lignes composée de 1.

Notons $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = (i)_{1 \leq i \leq n}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix} = (i^2)_{1 \leq i \leq n}$.

Le développement $(i+j+p)^2 = (j^2 + 2jp + p^2) + i \times (2j + 2p) + i^2$ se réécrit pour les colonnes de A de la façon suivante :

$$A_j = (j^2 + 2jp + p^2)C_1 + (2j + 2p)C_2 + C_3$$

Donc la famille $\mathcal{F} = (C_1; C_2; C_3)$ est une famille génératrice des colonnes de A , c'est donc une famille génératrice de $\text{Im } A$.

Or il s'agit d'une famille libre (ce que nous savons car nous avons déjà traité le cas $n = 3$).

Donc

$$\text{rg } A = \dim \text{Im } A = 3$$

Cor. 18.16 :

1. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda P + Q) = \int_{X-1}^X \lambda P(t) + Q(t) dt = \lambda \int_{X-1}^X P(t) dt + \int_{X-1}^X Q(t) dt = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q).$$

Ce qui s'annonce aussi plus simplement : Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

2. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists n \in \mathbb{N}, P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Or Φ étant linéaire, on a alors

$\Phi(P) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi(X^i)$. Il suffit donc de montrer que Φ conserve le degré des polynômes de la base canonique, la somme de deux polynômes de degrés

distincts étant égale au plus grand des degrés des deux polynômes.

Or

$$\begin{aligned} \Phi(X^i) &= \int_{X-1}^X \frac{t^i dt}{X^{i+1} - (X-1)^{i+1}} \\ &= \frac{\int_{X-1}^X t^i dt}{i+1} \\ &= \frac{-\sum_{k=0}^i \binom{i+1}{k} X^k (-1)^{i+1-k}}{i+1} \end{aligned}$$

est de degré i .

Donc $\forall i \in \mathbb{N}, \deg \Phi(X^i) = \deg X^i \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.

3. $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie, ce qui pose quelques soucis supplémentaires que l'on aimerait éviter. On se restreint donc à $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \Phi_n(P) = \Phi(P)$ qui est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question précédente. Démontrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ revient donc à démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme Φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors utiliser le théorème :

Φ_n est bijective $\Leftrightarrow \Phi_n$ est injective $\Leftrightarrow \Phi_n$ est surjective.

La question devient alors simple : on montre que Φ_n est injective en calculant son noyau :

$$\begin{aligned} \ker \Phi_n &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg \Phi(P) = -\infty\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg P = -\infty\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Donc Φ est un automorphisme d'espace vectoriel.

4. $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2} + X, P_2 = \frac{1}{6} + X + X^2, P_3 = \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{2} + X^3$ (ces résultats n'étant pas tout à fait immédiats puisqu'il faut pour les obtenir inverser une matrice $(4, 4)$ triangulaire supérieure de diagonale égale à 1).

5. D'une part, $\Phi(P_n(X) - P_n(X-1)) = X^n - (X-1)^n$ par linéarité de Φ et définition des polynômes de Bernoulli.

D'autre part, $\Phi(nX^{n-1}) = n \frac{X^n - (X-1)^n}{n} = X^n - (X-1)^n$ par définition de Φ .

Φ étant par ailleurs bijective, on en déduit que $P_n(X) - P_n(X-1) = nX^{n-1}$ d'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k^n &= \frac{\sum_{k=1}^N P_{n+1}(k) - P_{n+1}(k-1)}{n+1} \\ &= \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1} \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

6. Après calcul de P_4 , on obtient la formule classique $\sum_{k=1}^N k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.
