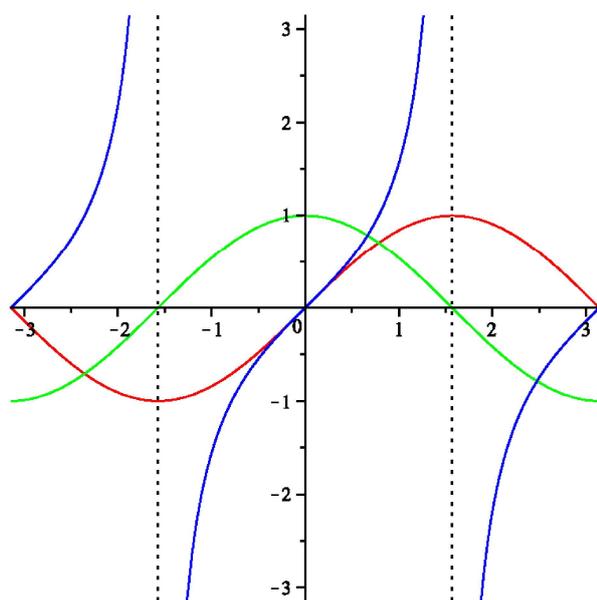


Synthèse sur les notions d'analyse censées être connues

V. Fonctions de référence

Fonctions trigonométriques



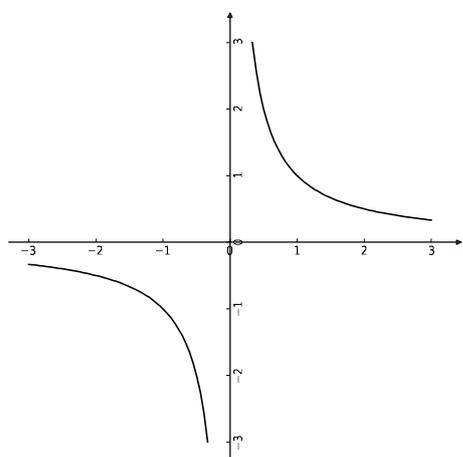
$$\begin{aligned} \cos' &= -\sin & \sin' &= \cos \\ \tan' &= \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \\ \cos^2 + \sin^2 &= 1 \end{aligned}$$

Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de \cos	-1	\nearrow	1	\searrow	-1

Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de \sin					

Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de \tan					

Fonction « inverse »



Strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^*

mais pas sur \mathbb{R}^ .*

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Permet de retenir les limites :

$$\frac{1}{-\infty} = 0^- \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

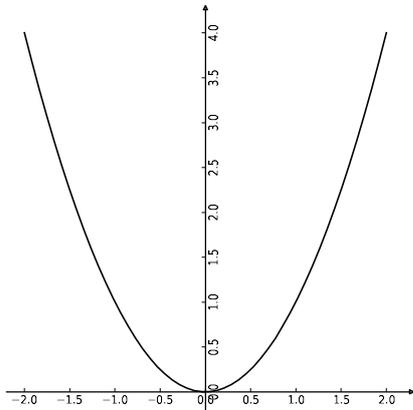
$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Fonction « carré »



Strictement décroissante sur \mathbb{R}_- .

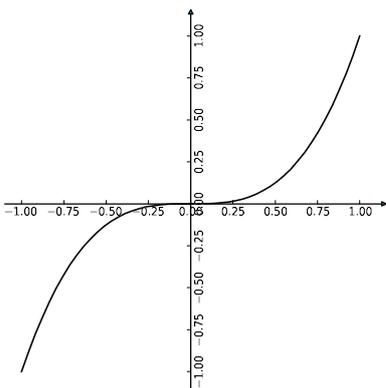
Strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

$$(x^2)' = 2x$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Fonction « cube »



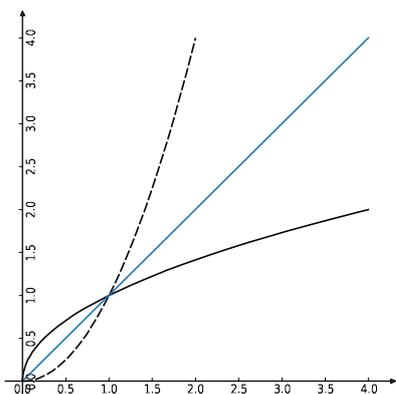
Strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$(x^3)' = 3x^2$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Fonction « racine carrée »



Strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Continue sur \mathbb{R}_+ *mais dérivable sur \mathbb{R}_+^** .

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

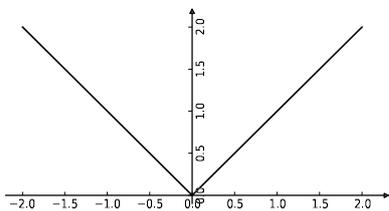
C'est la bijection réciproque de

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Fonction « valeur absolue »



Strictement décroissante sur \mathbb{R}_- .

Strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Continue sur \mathbb{R} *mais dérivable sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* .*

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, (|x|)' = -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, (|x|)' = +1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$$

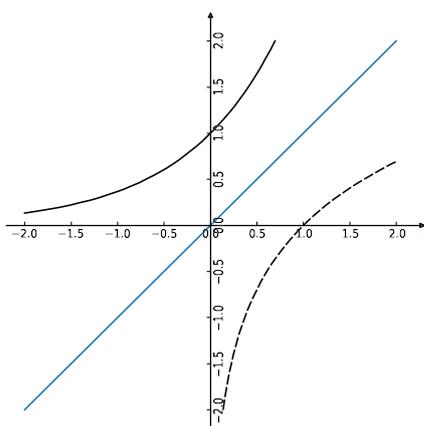
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2} = x.$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$$

Fonctions exponentielle et logarithme (népérien)



$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Bijective, strictement croissante sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

$$\exp' = \exp$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Bij. réciproque de exp. Strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

VI. Limites, dérivées

VI.1. Limites

Proposition 5.35 (Somme de fonctions)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$		$\alpha + \alpha'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$???
$-\infty$		$-\infty$???	$-\infty$

Proposition 5.36 (Produit de fonctions)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha' = 0$	0	0	0	???	???
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$???	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$???	$-\infty$	$+\infty$



Méthode : Calcul de limite

- On utilise les tableaux précédents et les limites des fonctions de référence : dans le cas où cela donne la limite cherchée, **on donne directement cette limite sans justification**.
- Dans les tableaux précédents, les cases où se trouve ??? sont des **formes indéterminées** (FI) : dans ce cas, il faut « lever l'indétermination ».
- Pour lever une indétermination, il y a plusieurs techniques :
 - ★ simplifier les expressions ;
 - ★ factoriser les expressions conduisant à une FI par leur **terme prépondérant** ;
 - ★ dans le cas d'expressions faisant intervenir une racine carrée, multiplier et diviser par « l'expression conjuguée » ;
 - ★ théorème des gendarmes ;
 - ★ interpréter la limite comme étant **la dérivée d'une fonction en un point** ;
 - ★ utiliser les « **limites comparées** » (que nous verrons plus tard dans l'année).

Exemples : calculer les limites suivantes (une seule de ces limites n'existe pas)

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3} & B &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^3}{x + x^2} & C &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x^2}} & D &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln^2(x) + 1} \\
 E &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x} & F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} & G &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} & H &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \\
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} & J &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x) & K &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)
 \end{aligned}$$

VI.2. Dérivées

- Les formules $(cte)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont toutes résumées par l'unique formule $(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient λ, μ deux réels, u, v deux fonctions dérivables.

$$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^u)' = u' \times e^u \quad (\ln(u))' = u' \times \frac{1}{u} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = u' \times \frac{-1}{u^2} \quad (\sqrt{u})' = u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$(u^2)' = u' \times 2u \quad (u^3)' = u' \times 3u^2 \dots$$