Probabilités

I. Espaces probabilisés

Ex. 19.1 On lance deux fois de suite un dé honnête.

1. Déterminer l'univers Ω ainsi que son cardinal.
2. Trouver le libellé pour l'événement
   $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.
3. A quelle partie de Ω correspond l'événement B : *"la somme des deux nombres est inférieure strictement à 5"*?
4. Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

Ex. 19.2 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Soient E *« au moins un des deux événements A, B se produit »* et F *« un seul des deux événements A, B se produit »*. Calculer $P(E)$ et $P(F)$.

Ex. 19.3 [*] Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A, B, C trois événements.

1. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = \begin{array}{l} P(A) + P(B) + P(C) \\ -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ +P(A \cap B \cap C) \end{array}$$

   et que

$$P(A \cup B \cup C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$$

2. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = p$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.
   Est-il possible que $p = \frac{2}{3}$?
3. On reprend les hypothèses de la question précédente en rajoutant que A, B, C sont deux à deux incompatibles. Calculer la valeur maximale de p et montrer sur un exemple que cette valeur est atteinte.

Ex. 19.4

1. Soient a, b, c, d quatre réels. Montrer que
   $\max(a; b) - \min(c; d) = \max(a - c; a - d; b - c; b - d)$.
2. On lance deux dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![2; 12]\!]$, on note $S_2 = n$ l'événement « la somme des deux dés vaut n ».
   Montrer que $P(S_2 = n) = \dfrac{\min(6; n-1; 13-n)}{36}$ puis que
   $$P(S_2 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![2; 7]\!] & \mapsto & \frac{n-1}{36} \\ n \in [\![7; 12]\!] & \mapsto & \frac{13-n}{36} \end{array} \right.$$
3. On lance trois dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![3; 18]\!]$, on note $S_3 = n$ l'événement « la somme des trois dés vaut n ».
   $$\text{Montrer que } P(S_3 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![3; 8]\!] & \mapsto & \frac{(n-1)(n-2)}{2\times 216} \\ n \in [\![8; 13]\!] & \mapsto & \frac{-n^2+21n-83}{216} \\ n \in [\![13; 18]\!] & \mapsto & \frac{(19-n)(20-n)}{2\times 216} \end{array} \right.$$

II. Probabilités conditionnelles, indépendance

Ex. 19.5 De la population canadienne, 30% sont Québécois, 28% parlent français et 24% sont Québécois et parlent français. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que cette personne :

1. soit Québécoise **ou** parle français ?
2. ne soit pas Québécoise **et** ne parle pas français ?
3. parle français mais ne soit pas Québécoise ?

Ex. 19.6 Un avion possède $n \geqslant 2$ places, toutes numérotées.
Le vol est complet, comporte donc n passagers, chacun affecté à l'une des places numérotées.
Cependant, le premier passager qui rentre dans l'avion s'assoit sur une place « au hasard » (avec équiprobabilité) sans vérifier si c'est bien la sienne.
Puis chacun des passagers suivants s'assoit

- à sa place si elle est libre ;
- sur une place « au hasard » (avec équiprobabilité) si sa place est déjà prise.

On numérote les passagers par leur ordre d'arrivée dans l'avion.
On note, pour $k \in [\![2; n]\!]$, P_k la probabilité que le passager k trouve sa place prise en rentrant dans l'avion.
On note aussi, pour $k \in [\![2; n]\!]$ et $i \in [\![1; k-1]\!]$, $A_{k,i}$ l'événement « la place du passager k a été prise par le passager i ».

1. Exprimer P_{k+1} comme une somme, puis trouver une formule de récurrence donnant P_{k+1} en fonction de P_k, n et k.
2. Calculer la probabilité que le dernier passager s'assoit sur la place qui lui est réservée.

Ex. 19.7 Pour se rendre au travail, un automobiliste dispose de deux itinéraires A et B. Le premier jour, il prend l'itinéraire A, puis, chaque jour, il prend le même itinéraire que la veille s'il n'y a pas eu d'embouteillage, et change d'itinéraire s'il y a eu des embouteillages.
La probabilité que l'automobiliste se trouve dans un embouteillage en prenant l'itinéraire A est notée a, celle correspondant à l'itinéraire B est notée b. On suppose que les événements successifs sont indépendants. On note p_n la probabilité que l'automobiliste emprunte l'itinéraire A le n-ième jour où il se rend au travail.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Ex. 19.8 On considère n urnes numérotées (de 1 à n) telles que dans l'urne numéro k se trouve k boules noires et $n-k+1$ boules blanches.
On effectue l'expérience aléatoire suivante : on choisit une urne au hasard, puis on tire une boule, on choisit à nouveau une urne au hasard puis on tire une boule.
On fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur tous les tirages.
Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches :

1. lors d'un tirage sans remise ?
2. lors d'un tirage avec remise ?

Ex. 19.9 On considère une famille comportant n enfants. On note M l'événement *« la famille a des enfants des deux sexes »* et F l'événement *« la famille a au plus une fille »*.

1. Si $n = 2$, les événements M et F sont-ils indépendants ?
2. Même question pour $n = 3$.

Ex. 19.10 On reprend les hypothèses et notations de la question b) de l'exercice 19.3,
notamment $P(A \cap B \cap C) = 0$ et on rajoute l'hypothèse que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants.
Montrer que $P(A \cup B \cup C) \leqslant \frac{3}{4}$ puis que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Peut-on avoir $p = \dfrac{1}{2}$?

Ex. 19.11 On considère les points de la droite réelle dont les abscisses sont des entiers relatifs. On part de l'origine et à chaque tour, on se déplace sur l'entier immédiatement à gauche (inférieur) ou immédiatement à droite (supérieur) de façon équiprobable.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de se retrouver à l'origine après $2n$ tours de jeu vaut

$$P = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres impairs}}{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres pairs}}$$