Maths - DS n°1 - Mercredi 2 octobre 2024, 2 heures

Sommes finies, nombres complexes, logique

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Soient E, F et G trois ensembles.
   Montrer que si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2) Énoncer les principales propriétés de $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Exercices

Exercice 1.

Soit $C = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1) Donner la forme algébrique de C^2 ***en simplifiant le plus possible l'expression obtenue***.
2) Donner la forme algébrique de C^4.
3) En déduire la forme trigonométrique de C.

Exercice 2.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ x & \mapsto & \ln(1+e^x) - x \end{array} \right.$ où J est un intervalle réel.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(1+e^{-x})$.
2) Étudier f et tracer son tableau de variations.
   On calculera notamment les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J à préciser.
4) Donner l'ensemble de définition et l'expression de la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 3.

Soit $A = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \setminus \{(0;0)\}$.
Soit Z la fonction définie par

$$Z : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{C} \\ (u;v) & \mapsto & \dfrac{u+iv}{u-iv} \end{array} \right.$$

Enfin, soient

$$\mathbb{V} = \{c \in \mathbb{U}, \mathcal{R}e\,(c) \in \mathbb{Q}, \mathcal{I}m\,(c) \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{\frac{u+iv}{u-iv}, (u;v) \in A\right\}$$

Autrement dit, A est l'ensemble des couples d'entiers relatifs ***dont l'un au moins est non nul***,
Z est définie pour tout couple $(u;v) \in A$, par $Z(u;v) = \dfrac{u+iv}{u-iv}$,
$\mathbb{V}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont la partie réelle et la partie imaginaire sont ***rationnelles***,
et $\mathbb{W}$ est formé de tous les nombres complexes de la forme $Z(u,v) = \dfrac{u+iv}{u-iv}$ pour $(u;v) \in A$.

1) ***Quelques exemples***
   Donner la ***forme algébrique*** des complexes suivants.
   On ***simplifiera le plus possible les expressions***, notamment, si les parties réelles et imaginaires sont rationnelles, ***on les donnera sous forme irréductible***.
   a) $c_0 = Z(1;1)$
   b) $c_1 = Z(2;1)$
   c) $c_2 = Z(3;1)$
   d) $c_3 = Z(3;2)$
   e) $c_4 = Z(4;2)$

2) ***Quelques propriétés***
   a) Montrer que $\forall (u;v) \in A, Z(u;v) \in \mathbb{U}$.
   b) Montrer que $\forall (u;v) \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} (nu;nv) \in A \\ Z(nu;nv) = Z(u;v) \end{cases}$
   c) Montrer que $\forall (u;v) \in A, Z(-u;v) = \overline{Z(u;v)}$.
   d) Montrer que $\forall (u;v) \in A, Z(v;u) = -\overline{Z(u;v)}$.

3) L'application Z est-elle injective ? Justifier.

4) Montrer que $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$.

5) ***On admet*** que $\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$, ce qui permet d'affirmer que $\mathbb{W} = \mathbb{V}$.
   Autrement dit, on admet que ***tout nombre complexe de module égal à 1, dont la partie réelle et la partie imaginaire sont rationnelles, peut s'écrire*** $Z(u;v)$ ***pour un certain couple*** $(u;v) \in A$.
   Le but de cette question est simplement d'illustrer cette propriété sur deux exemples :
   a) Soit $z_1 = \dfrac{15}{17} + i\dfrac{8}{17}$.
   Vérifier que $z_1 \in \mathbb{V}$ et trouver un couple $(u_1;v_1) \in A$ tel que $z_1 = Z(u_1;v_1)$.
   b) Soit $z_2 = \dfrac{-8}{17} + i\dfrac{15}{17}$.
   Vérifier que $z_2 \in \mathbb{V}$ et trouver un couple $(u_2;v_2) \in A$ tel que $z_2 = Z(u_2;v_2)$.

Exercice 4.

Soient n et p deux entiers naturels.
Le but de cet exercice est de simplifier les sommes du type

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^p$$

pour les petites valeurs de p.

À tire d'exemple, $S_0(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}$.

1) Simplifier l'expression de $S_0(n)$.

2) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3) En déduire que, pour tout entier naturel n, $S_1(n) = n2^{n-1}$.

4) Afin de simplifier l'expression des sommes S_2 et S_3, on introduit la fonction

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = (1 + e^x)^n$.

b) Montrer, pour tout réel x, $g_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k e^{kx}$.

c) Montrer que, pour tout réel x, $g_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$.

d) Montrer que, pour tout réel x, $g_n''(x) = ne^x (1 + e^x)^{n-2} (1 + ne^x)$.

e) Déduire des deux questions précédentes que $S_2(n) = n(n + 1)2^{n-2}$.

f) Donner une expression simplifiée de $S_3(n)$.