Correction DS n°1

Exercice 1.

1)
$$\begin{aligned} C^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2+\sqrt{2} - \left(2-\sqrt{2}\right) + 2i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} \\ &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} C^4 &= \left(C^2\right)^2 \\ &= \left(2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 8\left(1+i\right)^2 \\ &= 16i \end{aligned}$$

3) Écrivons C sous forme trigonométrique : $C = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.
$C^4 = 16i$ donc $r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Donc $r^4 = 16$ et $4\theta = \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.
Donc $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
Or $C = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, notamment $\mathcal{R}e\left(C\right) < 0$ et $\mathcal{I}m\left(C\right) < 0$.
Donc $\theta = \frac{\pi}{8} + \pi\left[2\pi\right]$ et finalement
$$C = 2e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

Exercice 2.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x) = \ln\left(1+e^x\right) - x = \ln\left(1+e^x\right) - \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$.
Donc $f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$.

2) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - 1 = \dfrac{-1}{1+e^x}$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ et f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+e^x\right) - x = +\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = 0^+$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$ 0^+

3) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
De plus, d'après le tableau de variations, et comme f est continue, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

4) Sa bijection réciproque f^{-1} est donc définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln\left(1 + e^{-x}\right) \\ &\Leftrightarrow e^y = 1 + e^{-x} \\ &\Leftrightarrow e^y - 1 = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow x = -\ln\left(e^y - 1\right) \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est la fonction

$$f^{-1} : \begin{cases}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln\left(e^x - 1\right) \end{cases}$$

Exercice 3.

1) ***Quelques exemples***

a) $c_0 = Z(1;1) = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$

b) $c_1 = Z(2;1) = \dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{4-1+4i}{4+1} = \dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5}$

c) $c_2 = Z(3;1) = \dfrac{3+i}{3-i} = \dfrac{9-1+6i}{9+1} = \dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5}$

d) $c_3 = Z(3;2) = \dfrac{3+2i}{3-2i} = \dfrac{9-4+12i}{9+4} = \dfrac{5}{13} + i\dfrac{12}{13}$

e) $c_4 = Z(4;2) = \dfrac{4+2i}{4-2i} = \dfrac{2+i}{2-i} = Z(2;1) = \dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5}$

2) ***Quelques propriétés***

a) On veut montrer que $\forall (u;v) \in A, Z(u;v) \in \mathbb{U}$.
Or $\mathbb{U}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des complexes de module 1.
Il suffit donc de prouver que $\left|Z(u;v)\right| = 1$.
Or $\left|Z(u;v)\right| = \left|\frac{u+iv}{u-iv}\right| = \dfrac{|u+iv|}{|u-iv|} = \dfrac{u^2+v^2}{u^2+v^2} = 1$.
Donc

$$\forall (u;v) \in A, Z(u;v) \in \mathbb{U}$$

b) Soit $(u;v) \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition de A, u et v sont deux entiers dont l'un au moins est non nul.
Supposons par exemple que $u \neq 0$.
Alors, d'une part, $nu \neq 0$ puisque $n > 0$.
D'autre part nu et nv sont produits de deux entiers relatifs, donc sont des entiers relatifs.
Donc $(nu;nv) \in A$.
$Z(nu;nv)$ est donc bien défini et
$Z(nu;nv) = \dfrac{nu+inv}{nu-inv} = \dfrac{u+iv}{u-iv} = Z(u;v)$.

c) Soit $(u;v) \in A$. $(-u;v)$ est alors aussi un élément de A et
$Z(-u;v) = \dfrac{-u+iv}{-u-iv} = \dfrac{u-iv}{u+iv} = \dfrac{\overline{u+iv}}{\overline{u-iv}}$.
Donc
$$Z(-u;v) = \overline{Z(u;v)}$$

d) Soit $(u;v) \in A$. $(v;u)$ est alors aussi un élément de A et
$Z(v;u) = \dfrac{v+iu}{v-iu} = \dfrac{i\,(u-iv)}{i\,(-u-iv)} = \dfrac{-u+iv}{u+iv}$.
Donc $Z(v;u) = -\dfrac{u-iv}{u+iv} = -\dfrac{\overline{u+iv}}{\overline{u-iv}}$.
Donc
$$Z(v;u) = -\overline{Z(u;v)}$$

3) D'après la question 1, $Z(4;2) = \dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5} = Z(2;1)$.
Donc $\dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5}$ possède au moins 2 antécédents par Z.
Donc Z n'est pas injective.

4) Soit $\dfrac{u+iv}{u-iv} \in \mathbb{W}$ (avec $(u;v) \in A$).
Montrons que $\dfrac{u+iv}{u-iv} \in \mathbb{V}$.
Nous avons déjà démontré à la question 2)a) que $Z(u;v) \in \mathbb{U}$.
Il ne reste donc qu'à démontrer que la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{u+iv}{u-iv}$ sont ***rationnelles***.
Or $\dfrac{u+iv}{u-iv} = \dfrac{(u+iv)^2}{(u-iv)(u+iv)} = \dfrac{u^2-v^2+2iuv}{u^2+v^2}$.
Donc $\mathcal{R}e\left(\dfrac{u+iv}{u-iv}\right) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ est le quotient de deux entiers, avec un dénominateur non nul : on a bien $\mathcal{R}e\left(\dfrac{u+iv}{u-iv}\right) \in \mathbb{Q}$.
De même, $\mathcal{I}m\left(\dfrac{u+iv}{u-iv}\right) = \dfrac{2uv}{u^2+v^2}$ est le quotient de deux entiers, donc $\mathcal{I}m\left(\dfrac{u+iv}{u-iv}\right) \in \mathbb{Q}$.
Donc $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$.

5) a) Soit $z_1 = \dfrac{15}{17} + i\dfrac{8}{17}$.
$15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$ donc $z_1 \in \mathbb{V}$.
On cherche un couple $(u_1;v_1) \in A$ tel que $z_1 = Z(u_1;v_1)$.
D'après la question précédente, on doit donc avoir $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & = & \dfrac{15}{17} \\ \dfrac{2uv}{u^2+v^2} & = & \dfrac{8}{17} \end{array}\right.$
Il suffirait par exemple que $\left\{\begin{array}{rcl} u^2-v^2 & = & 15 \\ 2uv & = & 8 \\ u^2+v^2 & = & 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u^2-v^2 & = & 15 \\ uv & = & 4 \\ 2u^2 & = & 32 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$
Or, en prenant $u = 4$ et $v = 1$, ces trois égalités sont bien vérifiées.
Donc $z_1 = \dfrac{15}{17} + i\dfrac{8}{17} = Z(4;1)$.
$$(u_1;v_1) = (4;1)$$

b) Soit $z_2 = \dfrac{-8}{17} + i\dfrac{15}{17}$.
$z_2 \in \mathbb{V}$ pour la même raison qu'à la question précédente.

De plus, le même raisonnement conduit à tenter de résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & = & \dfrac{-8}{17} \\ \dfrac{2uv}{u^2+v^2} & = & \dfrac{15}{17} \end{cases}$

Cependant, $2uv$ qui est pair ne peut clairement pas être égal à 15... Mais le système précédent peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & = & \dfrac{-16}{34} \\ \dfrac{2uv}{u^2+v^2} & = & \dfrac{30}{34} \end{cases}$$

Il suffirait par exemple que $\begin{cases} u^2-v^2 & = & -16 \\ 2uv & = & 30 \\ u^2+v^2 & = & 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2 & = & -16 \\ uv & = & 15 \\ 2u^2 & = & 18 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$

Or, en prenant $u = 3$ et $v = 5$, ces trois égalités sont bien vérifiées.

Donc $z_2 = \dfrac{-8}{17} + i\dfrac{15}{17} = Z(3;5)$.

$$(u_2; v_2) = (3;5)$$

Exercice 4.

1) $S_0(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$.

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} && \text{car le terme en } k=0 \text{ est nul} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{d'après la question précédente et car } k \geqslant 1 \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

4) Afin de simplifier l'expression des sommes S_2 et S_3, on introduit la fonction

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} \end{cases}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^k \times 1^{n-k} = (1+e^x)^n$.

b) Soit x un réel.

$g_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ke^{kx}$ puisque la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées et que $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$ pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$.

c) De même, $g_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$ par linéarité de la dérivation.

d) g_n'' est la dérivée seconde de g_n dont une expression est, pour x réel : $g_n(x) = (1+e^x)^n$.

On a donc $g_n'(x) = ne^x \left(1+e^x\right)^{n-1}$.

et
$$\begin{aligned} g_n''(x) &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-1} + ne^x \times (n-1)e^x \left(1+e^x\right)^{n-2} \\ &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-2} \left(1 + e^x + (n-1)e^x\right) \\ &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-2} \left(1+ne^x\right) \end{aligned}$$

e) Par définition, $S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = g_n''(0)$ d'après la question c).

Or d'après la question d),

$$g_n''(0) = n \times 1 \times (1+1)^{n-2} \times (1+n) = n(n+1)2^{n-2}$$

f) $S_3(n) = g_n'''(0)$ de manière évidente, en dérivant l'expression de g_n'' obtenue en question c) et en évaluant en 0.

Or
$$\begin{aligned} g_n'''(x) &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-2} \left(1+ne^x\right) + ne^x \times (n-2)e^x \left(1+e^x\right)^{n-3} \left(1+ne^x\right) \\ &\quad + ne^x \left(1+e^x\right)^{n-2} \times ne^x \\ &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-3} \left(\left(1+e^x\right)\left(1+ne^x\right) + (n-2)e^x \left(1+ne^x\right) + \left(1+e^x\right)ne^x\right) \\ &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-3} \left(1 + (n+1)e^x + ne^{2x} + (n-2)e^x + n(n-2)e^{2x} + ne^x + ne^{2x}\right) \\ &= ne^x \left(1+e^x\right)^{n-3} \left(1 + (3n-1)e^x + n^2 e^{2x}\right) \end{aligned}$$

Donc $S_3(n) = g_n'''(0) = n2^{n-3}\left(n^2+3n\right)$. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = n^2(n+3)2^{n-3}$$