Maths - DM n°1 - Pour le lundi 22 septembre,

Logique, fonctions, sommes finies

Exercice 1.

Soit E, F et G trois ensembles, f une fonction de E dans F, g une fonction de F dans G.

1) On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.

2) On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.

Les deux questions précédentes montrent que, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g surjective.

Dans les trois prochaines questions, on souhaite montrer que, si $g \circ f$ est bijective, f ***peut ne pas être surjective*** et g ***peut ne pas être injective***.

Pour les trois questions suivantes, on suppose de plus que $E = F = G = \mathbb{N}$.

3) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$.

   Montrer que f n'est pas surjective.

4) Expliciter une fonction g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

5) Montrer que la fonction g que vous avez donnée à la question précédente n'est pas injective.

Exercice 2.

Soit h la fonction définie par $h : \begin{cases} I & \to & J \\ x & \mapsto & \ln(2+x^2) - \ln(1+x^2) \end{cases}$.

1) Donner l'ensemble I de définition de h.

2) Montrer que pour tout réel x ***non nul***, $h(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

3) Étudier la fonction h et construire son tableau de variations.

   On précisera notamment les limites de la fonction.

4) Comment doit-on choisir l'intervalle J pour que h soit surjective ? Justifier.

5) Montrer que h est une bijection de $[0; +\infty[$ sur J.

Exercice 3.

1) Montrer qu'il existe a, b, c, d réels tels que la fonction polynomiale $k : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x+1) - k(x) = x^3$$

2) En déduire une formule simplifiée pour la somme $S_n = \sum_{j=1}^{n} j^3$.