

# Ensembles finis, calcul littéral

## I. Entiers, récurrence

**Ex. 2.1 (Cor.)** Déterminer les valeurs possibles du chiffre  $a$  pour que  $99999993a4$  soit divisible par 12.

### Ex. 2.2 (Cor.) [\*] *Algorithme d'Euclide*

On rappelle que étant donnés deux entiers  $a$  et  $b$  positifs distincts non nuls, l'algorithme d'Euclide est le suivant :

- on pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$  ;
- tant que c'est possible - c'est-à-dire tant que  $b_n \neq 0$  -, on définit  $a_{n+1} = b_n$  et  $b_{n+1}$  comme le reste de la division de  $a_n$  par  $b_n$  ;
- lorsque, pour un certain entier  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_{n_0} = 0$ , la valeur de  $a_{n_0}$  est le PGCD( $a$ ;  $b$ ) recherché.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour  $a = 1653$  et  $b = 2717$ .
2. Montrer que si  $n > 0$  alors  $a_{n+1} < a_n$  et  $b_{n+1} < b_n$  si ces termes sont définis.

3. Montrer que tant que  $a_n, b_n, a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont strictement positifs,  $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \text{PGCD}(a_{n+1}; b_{n+1})$

**Remarque** : ce type d'égalité entre des quantités calculées à chaque pas d'un algorithme est appelé **invariant de boucle** en informatique.

4. En déduire que l'algorithme d'Euclide se termine.
5. Montrer que si  $b_n = 0$  alors  $a_n = \text{PGCD}(a; b)$ .
6. Écrire un code Python permettant étant données deux variables  $a$  et  $b$  de calculer leur PGCD.

**Ex. 2.3 (Cor.)** [\*] Soit  $p$  un nombre premier supérieur à 4. Montrer que  $p^2 - 1$  est divisible par 24.

**Ex. 2.4 (Cor.)** [\*] Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que  $\text{PGCD}(a; b) \text{PPCM}(a; b) \leq ab$ .

**Ex. 2.5 (Cor.)** [\*] Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que  $\text{PGCD}(a; b) \text{PPCM}(a; b) = ab$ .

**Ex. 2.6** Trouver **tous** les entiers naturels  $x, y$  tels que 
$$\begin{cases} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x; y) = 105 \end{cases}$$

**Ex. 2.7** Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$ .

Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ème de  $f$  est la fonction

$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x + n)e^x$$

**Ex. 2.8** On définit les suites  $u$  et  $v$  par :

- $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$
- $v_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = n - v_n$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$ .

2. Trouver une formule explicite similaire pour la suite  $v$ , et la démontrer.

**Ex. 2.9** Pour tout entier  $n \geq 3$ , on définit la propriété  $\mathcal{P}(n)$  par :

« il existe  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$  tel que  $u_1 < u_2 < \dots < u_n$  et

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} \text{.} \text{ »}$$

1. Analyse du cas  $n = 3$  : on suppose qu'il existe  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$  tel que  $u_1 < u_2 < u_3$  et  $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$ .

- A. Montrer que  $u_1 < 3$ . En déduire la valeur de  $u_1$ .
- B. Trouver les valeurs de  $u_2$  et  $u_3$ .

2. Montrer que  $\mathcal{P}(4)$  est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.

3. Montrer par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 3$ .

## II. Sommes et produits finis

**Ex. 2.10** Transformer en utilisant le signe  $\sum$  puis simplifier pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

**Ex. 2.11 (Cor.)** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $S_n = 1 \times (n + 1) + 2 \times n + 3 \times (n - 1) + \dots + n \times 2 + (n + 1) \times 1$

**Ex. 2.12** Calculer  $S = \sum_{k=5}^{30} \frac{k^2 - 2k - 3}{k + 1}$ .

Indication : on pourra effectuer le changement d'indice  $j = k + 1$  ou remarquer que  $\frac{k^2 - 2k - 3}{k + 1} = \dots$

**Ex. 2.13** Simplifier les sommes suivantes ( $n$  étant un entier naturel) :

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=3}^{10} 2^{k-1} \bullet \sum_{k=-2}^n \frac{1}{3^{k+1}} \bullet \sum_{k=-5}^{15} k(10 - k) \\ & \bullet \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} \bullet \sum_{k=1}^n n - k + 1 \bullet \sum_{k=-n}^{n-1} \sin(2k + 1) \end{aligned}$$

**Ex. 2.14** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $S_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j)$  et  $T_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i, j)$ .

**Ex. 2.15** Simplifier pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ .

**Ex. 2.16** Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k \prod_{k \text{ impair}}^n k} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

**Ex. 2.17** Calculer et simplifier (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) les sommes suivantes :  

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad J = \sum_{k=1}^n k \times (k!)$$

## III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

**Ex. 2.18 Petite formule** Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout entier  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

En déduire une expression simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$$

et de

$$T_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

**Ex. 2.19** Simplifier les sommes suivantes : étant donné un entier naturel  $n$ ,  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$  et un complexe  $z$

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^n \quad S_5(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{k+1} (1-z)^{n-k}$$

$$T_p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

**Ex. 2.20**  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq p \leq n$ .

1. Montrer que  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ .

**Indication** : on pourra tenter d'utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître un télescopage.

Ou bien faire une démonstration par récurrence.

2. Simplifier la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n-1}{2n-1-k}$

$$\text{puis la fraction } A_n = \frac{S_n}{\binom{2n}{n}}.$$

**Ex. 2.21** Soient  $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $\frac{p+1}{\binom{n+p-1}{p}} - \frac{p+1}{\binom{n+p}{p}} = \frac{p}{\binom{n+p}{p+1}}$ .
2. En déduire une expression simplifiée de  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$   
et  
$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}.$$

## Corrections

**Cor. 2.1** : Soit  $N = 9999999304 + a \times 10$ .  $N$  doit être divisible par 12 or  $9999999300 = 12 \times 25 \times 33333331$ . Donc  $12|N \Leftrightarrow 12|(10a+4)$ .

Deux solutions s'offrent alors :

- comme  $a$  est un *chiffre*,  $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . On essaye toutes les valeurs de  $a$  et on montre que  $12|(10a+4)$  pour  
★  $a = 2 : 20 + 4 = 24 = 2 \times 12 ;$   
★  $a = 8 : 84 = 7 \times 12.$
- on écrit :  $10a + 4 = (12 - 2)a + 4 = 12a + 4 - 2a$  est divisible par 12 si et seulement si  $4 - 2a$  l'est. On retrouve à nouveau les deux cas possibles,  $a = 2$  donne  $4 - 2a = 0$  et  $a = 2 + 6 = 8$  donne  $4 - 2a = -12$ , de façon plus simple à calculer.

## Cor. 2.2 :

| $a_i$ | $b_i$ | $a_i = qb_i + r$              |
|-------|-------|-------------------------------|
| 1653  | 2717  | $1653 = 0 \times 2717 + 1653$ |
| 2717  | 1653  | $2717 = 1 \times 1653 + 1064$ |
| 1653  | 1064  | $1653 = 1 \times 1064 + 589$  |
| 1064  | 589   | $1064 = 1 \times 589 + 475$   |
| 589   | 475   | $589 = 1 \times 475 + 114$    |
| 475   | 114   | $475 = 4 \times 114 + 19$     |
| 114   | 19    | $114 = 6 \times 19 + 0$       |
| 19    | 0     | Impossible                    |

Le PGCD de 1653 et 2717 est 19.

2. À partir du rang  $n = 1$ , les termes  $a_n$  et  $b_n$  sont définis par la formule de récurrence  $a_n = b_{n-1}$  et  $b_n$  est le reste de la division euclidienne de  $a_{n-1}$  par  $b_{n-1}$  : donc  $b_n < b_{n-1} = a_n$ .  
De plus, comme  $a_{n+1} = b_n$ ,  $a_{n+1} < a_n$ .
3. Soit  $d$  un diviseur commun de  $a_n$  et  $b_n$ .  $d|a_{n+1}$  puisque  $a_{n+1} = b_n$ .  
De plus, la division euclidienne  $a_n = qb_n + r$  permet d'écrire  $r = a_n - qb_n$  qui est donc divisible par  $d$  (comme différence de deux nombres divisibles par  $d$ ).  
Donc  $d$  divise  $r = b_{n+1}$ .  
Donc l'ensemble  $D_n$  des diviseurs communs à  $a_n$  et  $b_n$  est inclus dans l'ensemble  $D_{n+1}$  défini de même.  
Réciproquement, en écrivant que  $a_n = qa_{n+1} + b_{n+1}$ , on montre que  $D_{n+1} \subset D_n$ .  
Donc  $D_n = D_{n+1}$   
et  $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \max D_n = \max D_{n+1} = \text{PGCD}(a_{n+1}; b_{n+1})$ .
4. On a montré que tant que l'algorithme n'est pas terminé  $b_n < b_{n-1}$ . La suite  $(b_n)$  est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs (puisque le reste d'une division euclidienne est positif). Il est donc impossible que cette suite soit infinie (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs inférieurs  $b_0 = b$ ).  
L'algorithme d'Euclide se termine donc en un nombre fini d'étapes, lorsque le reste de la division euclidienne effectuée dans une boucle est nul.
5. Supposons que  $b_n = 0$ . Alors  $a_{n-1} = qb_{n-1} + 0$  est multiple de  $b_{n-1}$ . Donc  $\text{PGCD}(a_{n-1}; b_{n-1}) = \text{PGCD}(qb_{n-1}; b_{n-1}) = b_{n-1} = a_n$ .  
Or pour tout  $n$  valide  $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \text{PGCD}(a; b)$  (c'est un invariant, sa valeur est la même qu'au début de l'algorithme).  
Donc  $\text{PGCD}(a; b) = a_n$  lorsque  $b_n = 0$ .
6. 

```
def euclide(a,b):
    while b>0:
```

```

a,b=b,a%b
print(a,b)
return a

```

**Cor. 2.3** : Si  $p$  premier est supérieur à 4, en particulier  $2 \nmid p$  et  $3 \nmid p$ . Donc  $p = 1 + 6k$  ou  $p = 5 + 6k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (tous les autres cas donnent un nombre divisible par 2 ou 3).  
 Donc  $p^2 - 1 = 12k + 36k^2 = 12k(1 + 3k)$  ou  $p^2 - 1 = 24 + 60k + 36k^2 = 24 + 12k(5 + 3k)$ .  
 Or si  $k$  est pair, alors  $12k$  est un multiple de 24.  
 Et si  $k$  est impair,  $12(1 + 3k)$  et  $12(5 + 3k)$  sont des multiples de 24.  
 Donc  $p^2 - 1$  est divisible par 24 pour tout nombre premier  $p$  supérieur à 4.

**Cor. 2.4** : Considérons la fraction  $F = \frac{ab}{\text{PGCD}(a;b)}$ .

D'une part,  $F = \frac{a}{\text{PGCD}(a;b)} \times b$ . Comme  $\text{PGCD}(a;b)$  divise  $a$ ,  $F$  est un entier multiple de  $b$  et de  $a' = \frac{\text{PGCD}(a;b)}{b} \in \mathbb{N}$ .

D'autre part,  $F = \frac{a}{\text{PGCD}(a;b)} \times b$ . Comme  $\text{PGCD}(a;b)$  divise  $b$ ,  $F$  est un entier multiple de  $a$  et de  $b' = \frac{\text{PGCD}(a;b)}{a} \in \mathbb{N}$ .

$F$  est donc un multiple de  $a$  et de  $b$ . Par conséquent  $\text{PPCM}(a;b)$  qui est **le plus petit** des multiples de  $a$  et de  $b$  vérifie

$$\text{PPCM}(a;b) \leq F$$

En remplaçant  $F$  par sa définition on obtient donc  $\text{PGCD}(a;b) \text{PPCM}(a;b) \leq ab$

**Cor. 2.5** : En reprenant les notations et la démonstration de l'exercice 2.4, on a  $F = \frac{ab}{\text{PGCD}(a;b)} = k \text{PPCM}(a;b)$  pour un entier  $k \in \mathbb{N}^*$ .

En posant  $G = \frac{ab}{\text{PPCM}(a;b)}$ , on a donc  $G = k \text{PGCD}(a;b)$ . En particulier,  $G$  est un entier.

Or  $\text{PPCM}(a;b)$  est un multiple (strictement positif) de  $a$  donc il existe  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{PPCM}(a;b) = ia$ . De même, il existe  $j \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{PPCM}(a;b) = jb$ .

Donc  $G = \frac{ab}{ia} = \frac{b}{i}$  divise  $b$  et de même  $G = \frac{ab}{jb} = \frac{a}{j}$  divise  $a$ .

Or  $\text{PGCD}(a;b)$  est le plus grand diviseur commun à  $a$  et  $b$  donc  $\text{PGCD}(a;b) \geq G$ .  
 En remplaçant  $G$  par sa définition, on obtient donc  $\text{PGCD}(a;b) \text{PPCM}(a;b) \geq ab$ .  
 Le résultat de l'exercice 2.4 permet alors de conclure que  $\text{PGCD}(a;b) \text{PPCM}(a;b) = ab$ .

**Cor. 2.11** : Le premier travail à faire est d'exprimer cette somme à l'aide d'un signe  $\sum$  :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i)$$

Ensuite, on utilise les différentes techniques du cours. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 S_n &= (n+2) \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+2) \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 &= (n+1)(n+2) \frac{3n+6-2n-3}{6} \\
 &= \binom{n+3}{3}
 \end{aligned}$$