

Nombres complexes

I. Définitions



Axiome 3.1

Il existe un nombre i ayant la propriété $i^2 = -1$.



Remarque

$i \notin \mathbb{R}$ puisque le carré de tout nombre réel est positif.



Définition 3.2

On appelle **nombre imaginaire** le produit de i par un nombre réel et **nombre complexe** la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire.

Autrement dit, **un nombre complexe z peut toujours s'écrire sous la forme**

$$z = a + ib, \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe.



Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres imaginaires.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a = a + 0i$ (réel pur), $ib = 0 + ib$ (imaginaire pur) et $0 = 0 + 0i$.

On peut donc écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.



Axiome 3.3

L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des nombres réels, à ceci près que

$$i^2 = \dots$$

En particulier, les techniques de calcul des sommes finies du chapitre 2 restent valables pour des familles de nombres complexes, tout comme les identités remarquables.

Ex. 3.1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique (a et b sont des nombres réels, n un entier naturel) :

$$A = i^3$$

$$B = i^4$$

$$C = i^5$$

$$D = i^n$$

$$E = (1 + 2i) \times \frac{3 + 4i}{5}$$

$$F = (a + ib)(a - ib)$$

$$G = (1 - i)^4$$

$$H = \frac{a + ib}{6 - 8i}$$

Ex. 3.2 Simplifier les expressions suivantes (a et b sont des nombres réels) :

$$A = (1 + i)^2$$

$$B = (1 + i)^4$$

$$C = (2 + i)(3 - i)$$

$$D = (1 + i)^2 + (1 - i)^2$$

$$E = (1 + i)(1 - i)$$

$$F = (3 - 4i)(3 + 4i)$$

$$G = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a + ib)$$

$$H = (1 + i\sqrt{3})^6$$

**Définition 3.4**

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on appelle

- **conjugué** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
- **module** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$;
- **partie réelle** de z le nombre réel $\operatorname{Re}(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2}$;
- **partie imaginaire** de z le nombre réel $\operatorname{Im}(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Propriété 3.5

Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

- | | |
|---|---|
| 1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ | 8) $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ |
| 2) $\overline{-z} = -\bar{z}$ | 9) $z\bar{z} = z ^2$ |
| 3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ | 10) Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ |
| 4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ | 11) $ \bar{z} = z = -z $ |
| 5) $\overline{\bar{z}} = z$ | 12) $ z \times z' = z \times z' $ |
| 6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ | 13) Si $z' \neq 0$, $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$ |
| 7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ | |

**Méthode : Parties réelles et imaginaires**

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ peuvent s'avérer **extrêmement efficaces**.

Pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, on montre que $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = z$.

Pour montrer qu'un nombre complexe z est imaginaire, on montre que $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = -z$.

Ex. 3.3 On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Cor. 3.3**Théorème 3.6 (Première inégalité triangulaire)**

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 3.7 (Seconde inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

**Définition 3.8**

On appelle **affixe** du point $M(a; b)$ ou du vecteur $\vec{u}(a; b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

**Notation**

Étant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :

$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le **disque ouvert de centre z_0 et de rayon r** ;

$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ le **disque fermé de centre z_0 et de rayon r** ;

$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le **cercle de centre z_0 et de rayon r** .

Notamment, $|z - z_0|^2 = r^2$ est **une équation cartésienne du cercle de centre $C(z_0)$ et de rayon r** .

Ex. 3.4 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(3; -1)$ et de rayon 3.

Cor. 3.4**Propriété 3.9 (R-linéarité des parties réelle et imaginaire)**

Les fonctions $\mathcal{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sont **R-linéaires** c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \mathcal{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{Re}(z_1) + \mu \mathcal{Re}(z_2) \\ \mathcal{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{Im}(z_1) + \mu \mathcal{Im}(z_2) \end{cases}$$

« **Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels** ».

- $0 \in \mathbb{C}$: il existe un **élément neutre pour l'addition** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$: tout complexe possède un **symétrique** pour l'addition
 z' est noté $-z$ et appelé **opposé** de z
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$: l'addition complexe est **commutative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$: l'addition complexe est **associative**
- $1 \in \mathbb{C}$: il existe un **élément neutre pour la multiplication** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$: tout complexe non nul possède un **symétrique** pour la multiplication
 z' est noté $z^{-1} = \frac{1}{z}$ et appelé **inverse** de z
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$: la multiplication complexe est **commutative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = z z' z''$: la multiplication complexe est **associative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$: la multiplication complexe est **distributive** sur l'addition complexe

**Définition 3.10 (Structure de corps)**

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps** : cela signifie très exactement que *l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes* qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

II. Nombres complexes de module 1**Notation**

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

$\mathbb{U}$ a notamment pour éléments 1, i , -1 et $-i$.

Propriété 3.11

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :

- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$;
- il existe dans $\mathbb{U}$ un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$;
- la multiplication est commutative et associative.

**Définition 3.12**

On résume les propriétés précédentes en disant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un **groupe commutatif**.

Proposition 3.13

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! (r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$$

Ex. 3.5 Écrire les nombres complexes suivantes sous la forme ru où $r \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{U}$:

$$A = 3 + 3i \quad B = -3 - 3i \quad C = -3 + 4i \quad D = 12 - 5i$$

Proposition 3.14 (Existence des arguments)

Pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe une infinité de valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $u = \cos \theta + i \sin \theta$. De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de 2π .

**Définition 3.15 (Arguments d'un nombre complexe non nul)**

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! \rho \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique de z** dans laquelle ρ est le module de z et θ est un **argument** de z .

**Définition 3.16 (Argument principal)**

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 3.14 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de 2π .

On dit que l'argument est défini **à 2π près** ou encore **modulo 2π** .

On appelle **argument principal** l'unique argument compris dans l'intervalle $] - \pi; \pi]$.

**Notation**

On note $\arg(z)$ tout argument d'un nombre complexe non nul et $\text{Arg}(z)$ l'argument principal de z . Pour signifier que $\arg(z)$ est défini à 2π près, on écrira

$\arg(z) \equiv \text{Arg}(z) [2\pi]$ qui se lit « tout argument de z est **congru** à son argument principal modulo 2π » **ce qui équivaut à** $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$.

**Notation**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \mathbb{U}$.

$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note e^z le nombre complexe $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 3.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall (\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2, \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 :$

- | | |
|--|--|
| • $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ | • $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$ |
| • $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ | • $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ |
| • $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ | • $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$ |
| • $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$ | • $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi$ |
| • $\Leftrightarrow \theta \equiv 0 [2\pi]$ | • $\Leftrightarrow z \equiv 0 [2i\pi]$ |
| • $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$ | • $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi]$ |

**Important !**

Il n'existe pas de logarithme complexe !

Corollaire 3.18

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

**Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul**

La démonstration de la proposition 3.14 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul :

- 1) on commence par calculer $r = |z|$ puis on écrit z sous la forme $z = ru$ où u est de module 1 ;
- 2) on cherche ensuite $\phi \in [0; \pi]$ tel que $\text{Re}(u) = \cos(\phi)$; on verra au chapitre ?? comment obtenir cette valeur dans le cas général.
- 3) enfin, si $\text{Im}(u) \geq 0$ alors $\theta = \text{Arg}(z) = \phi$,

sinon $\operatorname{Im}(u) < 0$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z) = -\phi$.

On en conclut que $z = |z|e^{i\theta}$.

Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de $\operatorname{Re}(z)$ (voir chapitre ??).

Ex. 3.6 Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$A = 3 + 3i \quad B = -3 - 3i \quad C = -3 + \sqrt{3}i \quad D = 1 - \sqrt{3}i$$

Ex. 3.7 On pose $z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Calculer z^2 et en déduire la valeur de $\Theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Cor. 3.7

Ex. 3.8 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) : \bar{z} = z^3$$

Cor. 3.8

III. Utilisations en trigonométrie

Proposition 3.19 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

Proposition 3.20 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ex. 3.9 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{-1 + i} \right)^{50}$.

Cor. 3.9

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```



Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on

« **factorise par l'angle moitié** » :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Il s'agit de la forme trigonométrique si $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$. Sinon, on obtient la forme trigonométrique en écrivant $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$ avec $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geq 0$.

Ex. 3.10 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = 1 + e^{i\theta}$ et $Z = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi]$.

Cor. 3.10



Méthode : Développement de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

Pour obtenir pour tout entier n et tout réel x les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ on utilise la formule 3.20 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.11 Écrire pour x réel $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Cor. 3.11



Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Réciproquement, pour transformer, pour $x \in \mathbb{R}$, des produits de $\cos x$ et $\sin x$ en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de x , on utilise les formules 3.19 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.12 Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

Cor. 3.12



Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant $\cos x$ et $\sin x$ comme parties réelle et imaginaire de e^{ix} puis en factorisant l'expression obtenue.

Ex. 3.13 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$

et $B_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Cor. 3.13

Ex. 3.14 Factoriser pour $p, q \in \mathbb{R}$, $A = \cos(p) + \cos(q)$ et $B = \sin(p) - \sin(q)$.

Cor. 3.14