Correction DM n°1

Exercice 1.

1) On suppose $g \circ f$ injective.
On souhaite montrer que f est injective.
Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Leurs images par g sont donc égales, c'est-à-dire $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.
Ceci s'écrit aussi $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, et comme $g \circ f$ est injective, $x = x'$.
Ce qui prouve que f est injective.

2) On suppose $g \circ f$ surjective.
On souhaite montrer que g est surjective.
Soit z un élément de G.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x de E tel que $g \circ f(x) = z$.
On a donc $z = g\big(f(x)\big)$, c'est-à-dire, en posant $y = f(x)$ -qui est un élément de F-, $z = g(y)$.
On a ainsi prouvé qu'il existe un élément y de F tel que $g(y) = z$, ce qui prouve que g est surjective.

3) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$.
Pour tout entier naturel n, $f(n) = n + 1 \geqslant 1 > 0$.
Donc 0 ne possède pas d'antécédent par f : f n'est donc pas surjective.

4) Soit $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ n > 0 & \mapsto & n-1 \end{cases}$.
g est bien une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ puisque $g(0) = 0 \in \mathbb{N}$ et que pour $n \geqslant 1$, $g(n) = n - 1 \geqslant 0$.
De plus, pour tout entier n, $f(n) = n + 1 \geqslant 1$, donc $g\big(f(n)\big) = (n + 1) - 1 = n$.
Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

5) Cependant la fonction g donnée à la question précédente vérifie $g(0) = 0$ et $g(1) = 1-1 = 0$.
Donc 0 a deux antécédents par g : g n'est donc pas injective.
Ceci prouve que $g \circ f$ peut être bijective, sans que ni f ni g ne le soit.

Exercice 2.

Soit h la fonction définie par $h : \begin{cases} I & \to & J \\ x & \mapsto & \ln(2 + x^2) - \ln(1 + x^2) \end{cases}$.

1) $h(x) = \ln(2 + x^2) - \ln(1 + x^2)$ est définie si et seulement si $\begin{cases} 2 + x^2 > 0 \\ 1 + x^2 > 0 \end{cases}$.
Or, le carré d'un nombre réel étant toujours positif, pour tout réel x,

$2+x^2 \geqslant 2 > 0$ et $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.

Donc l'ensemble de définition de h est $I = \mathbb{R}$.

2) Soit x un réel ***non nul***.

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln\left(2+x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right) \\ &= \ln\left(x^2\left(\tfrac{2}{x^2}+1\right)\right) - \ln\left(x^2\left(\tfrac{1}{x^2}+1\right)\right) \quad \text{car } x \neq 0 \\ &= \ln\left(x^2\right) + \ln\left(\tfrac{2}{x^2}+1\right) - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\tfrac{1}{x^2}+1\right) \\ &= \ln\left(1+\tfrac{2}{x^2}\right) - \ln\left(1+\tfrac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

3) h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la première question.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{2x}{2+x^2} - \dfrac{2x}{1+x^2} = 2x \times \dfrac{1+x^2-2-x^2}{\left(2+x^2\right)\left(1+x^2\right)}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{-2x}{\left(2+x^2\right)\left(1+x^2\right)}$.

Donc $h'(x)$ est sur signe de $-x$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \ln\left(2+(-x)^2\right) - \ln\left(1+(-x)^2\right) = h(x)$ donc h est paire.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $h(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

4) h est une fonction paire, donc $h\left(\mathbb{R}_-^*\right) = h\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Par ailleurs, h est une fonction continue, donc d'après le tableau de variations,

$J = h(\mathbb{R}) = h\left(\mathbb{R}_+^*\right) =]0;\ln(2)]$.

5) Sur $[0;+\infty[$, h est strictement décroissante donc injective.

Par ailleurs, d'après la question précédente, h est surjective de $[0;+\infty[$ sur $J =]0;\ln(2)]$.

Donc h est bijective de $[0;+\infty[$ sur $]0;\ln(2)]$.

Exercice 3.

1) Soient a, b, c, d quatre nombres réels et k la fonction polynomiale définie par

$k : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$.

$$\begin{aligned} k(x+1) - k(x) = x^3 &\Leftrightarrow a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx = x^3 \\ &\Leftrightarrow a\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right) + b\left(x^3+3x^2+3x+1\right) \\ &\ +c\left(x^2+2x+1\right) + d(x+1) - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx = x^3 \\ &\Leftrightarrow 4ax^3 + 6ax^2 + 4ax + a + 3bx^2 + 3bx + b + 2cx + c + d = x^3 \\ &\Leftrightarrow 4ax^3 + (6a+3b)x^2 + (4a+3b+2c)x + a + b + c + d = x^3 \end{aligned}.$$

Pour que, pour tout réel x, $k(x+1) - k(x) = x^3$, il suffit donc que

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4a &=& 1 \\ 6a+3b &=& 0 \\ 4a+3b+2c &=& 0 \\ a+b+c+d &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& \dfrac{1}{4} \\ b &=& \dfrac{-1}{2} \\ c &=& \dfrac{1}{4} \\ d &=& 0 \end{array}\right.$$

La fonction $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} = \left(\dfrac{x(x-1)}{2}\right)^2 \in \mathbb{R}$ convient donc.

2) Simplifions la somme $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} j^3 \\
&= \sum_{j=1}^{n} k(j+1) - k(j) \\
&= k(n+1) - k(1) \qquad \text{par télescopage} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+1-1)}{2}\right)^2 - 0 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$