# Sommes finies, nombres complexes, systèmes et analyse

L'usage d'une calculatrice est interdit.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Cours

Énoncer et démontrer la formule du binôme.

## Exercices

### Exercice 1.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$A = \frac{1}{12+5i} \qquad B = \frac{-1+i}{-1-i} \qquad C = (2+i)^4$$

$$D = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \qquad E = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^8 \qquad F = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2025}$$

### Exercice 2.

Soit $a$ un paramètre réel. On considère le système d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ donné par :

$$(S_a) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & az & = & 1 \\ ax & - & y & & & = & 0 \\ & & ay & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

1) ***Dans cette question***, on suppose que $a = 1$.
   Donner l'ensemble des solutions du système $(S_a)$.

2) ***Dans cette question***, on suppose $a \neq 1$.
   Donner l'ensemble des solutions du système $(S_a)$.

### Exercice 3.

Soit $Z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} \in \mathbb{C}$.

1) Calculer $|Z|$.

2) Montrer que $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(1+i\big)$.

3) Calculer $Z^8$.

4) Calculer $Z^{2025}$.

## Exercice 4.

Soit $f$ la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & \ln\left(e^{2x}+e^{x}+1\right) \end{array} \right.$ où $I$ et $J$ sont deux intervalles réels que nous allons préciser.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de $f$.

1) Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
   On note $I$ cet ensemble.

2) Montrer que $f$ est dérivable sur $I$ et donner une expression de sa dérivée.

3) Montrer que $f$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à préciser.

4) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(-x) = 2x$$

6) Déduire de la question précédente que $\mathcal{C}_f$ possède une ***asymptote oblique*** dont on donnera une équation.

7) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ sur le repère fourni en annexe.
   On fera notamment apparaître l'asymptote obtenue à la question 6 et la tangente de la question 4.
   Pour les applications numériques on donne :
$$\ln(3) \approx 1,1$$
$$\ln\left(1+e+e^2\right) \approx 2,4$$

## Exercice 5.

Soit $n$ un entier naturel.

On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\binom{k}{2}}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}$ et $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k}$.

Le but de cet exercice est de simplifier ces trois sommes.

***Calcul des premiers termes***

1) Calculer la valeur de $A_2$, $A_3$, $B_0$, $B_1$, $C_0$, $C_1$ et $C_2$.

***Calcul de $A_n$***

2) Montrer que pour tout entier $k$ ***supérieur ou égal à 2***, $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3) Déduire de la question précédente que $A_n = \dfrac{2(n-1)}{n}$.

***Calcul de*** $B_n$

4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

5) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de $B_n$.

***Calcul de*** $C_n$

6) À l'aide de la question 4., montrer que $C_{n+1} = qC_n$ où $q$ est un réel que l'on précisera.

7) En déduire une expression simplifiée de $C_n$.

***ANNEXE***

***NOM*** : .................................... ***Prénom*** : ....................................