Correction DS n°1

Exercice 1.

$A = \dfrac{1}{12+5i} = \dfrac{12-5i}{(12+5i)(12-5i)} = \dfrac{12-5i}{144+25} = \dfrac{12}{169} - i\dfrac{5}{169}$

$B = \dfrac{-1+i}{-1-i} = \dfrac{(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)} = \dfrac{1-2i+i^2}{1+1} = -i$

$C = (2+i)^4 = \left((2+i)^2\right)^2 = (4-1+4i)^2 = 9-16+24i = -7+24i$

$D = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1-3+2i\sqrt{3}}{1+3} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{array}{rclcl}
E & = & D^8 & = & \left(\left(\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2\right)^2 \\
& = & \left(\left(\dfrac{1-3-2i\sqrt{3}}{4}\right)^2\right)^2 & = & \left(\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2 \\
& = & \left(\dfrac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}\right)^2 & = & \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
& = & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & &
\end{array}$$

Le calcul précédent montre que $D^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = E$ et que $D^4 = E^2 = D$.

On cherche maintenant $F = D^{2025}$.

Or $2025 = 1 + 2 \times 1012 = 1 + 4 \times 506 = 1 + 8 \times 253$

De même, $253 = 1 + 2 \times 126 = 1 + 4 \times 63$.

Enfin $63 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Donc :

$$\begin{array}{rclcl}
F & = & D^{2025} & = & D^{1+8\times 253} \\
& = & D \times (D^8)^{253} & = & D \times E^{253} \\
& = & D \times E^{1+4\times 63} & = & D \times E \times (E^4)^{63} \\
& = & D \times E \times E^{63} & & \\
& = & D \times E \times E^{1+2+4+8+16+32} & = & D \times E \times E \times D \times E \times D \times E \times D \\
& = & D^4 \times E^4 & = & D \times E \\
& = & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & & \\
& = & \dfrac{1+3}{4} = 1 & &
\end{array}$$

Donc $F = D^{2025} = 1$.

Exercice 2.

1) ***Dans cette question***, on suppose que $a = 1$.
   Le système devient donc :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -1 \\ & & 0 & & & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Donc $(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+z \\ y & = & 1+z \end{array}\right.$.

Il y a donc une infinité de solutions qui sont les triplets $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ de la forme

$$\mathcal{S} = \{(1+z; 1+z; z), z \in \mathbb{R}\}$$

2) ***Dans cette question***, on suppose $a \neq 1$.

$$(S_a) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & az & = & 1 \\ ax & - & y & & & = & 0 \\ & & ay & - & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & az & = & 1 \\ & - & y & + & a^2z & = & -a \quad L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ & & ay & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & az & = & 1 \\ & - & y & + & a^2z & = & -a \\ & & & & (a^3-1)\,z & = & 1-a^2 \quad L_3 \leftarrow L_3 + aL_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & az & = & 1 \\ & - & y & + & a^2z & = & -a \\ & & & & z & = & \dfrac{1-a^2}{a^3-1} \quad \text{car } a \neq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + \dfrac{a-a^3}{a^3-1} \\ y & = & a + \dfrac{a^2-a^4}{a^3-1} \\ z & = & \dfrac{1-a^2}{a^3-1} \end{array}\right.$$

Par ailleurs, $\dfrac{1-a^2}{a^3-1} = \dfrac{(1-a)(1+a)}{(a-1)\left(1+a+a^2\right)} = \dfrac{-1-a}{1+a+a^2}$.

Donc le système possède une unique solution qui est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1+a+a^2-a-a^2}{1+a+a^2} = \dfrac{1}{1+a+a^2} \\ y & = & \dfrac{a+a^2+a^3-a^2-a^3}{1+a+a^2} = \dfrac{a}{1+a+a^2} \\ z & = & \dfrac{-1-a}{1+a+a^2} \end{array}\right.$$

Finalement, si $a \neq 1$,

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{1+a+a^2}; \frac{a}{1+a+a^2}; \frac{-1-a}{1+a+a^2}\right)\right\}$$

Exercice 3.

1) $|Z| = \dfrac{\left|1+\sqrt{2}+i\right|}{\left|1+\sqrt{2}-i\right|} = 1$ car $1+\sqrt{2}+i$ et $1+\sqrt{2}-i$ sont deux complexes conjugués, donc ont même module.

2) On a :

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1+2i\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+2+2\sqrt{2}+1} \\
&= \frac{1+2+2\sqrt{2}-1+2i\left(1+\sqrt{2}\right)}{4+2\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\left(1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)(1+i)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} \\
&= \frac{1+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donc $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)$

3) En utilisant la dernière expression de Z :

$$\begin{aligned}
Z^8 &= \left((Z^2)^2\right)^2 \\
&= \left(\left(\frac{1}{2}\times\left(1-1+2i\right)\right)^2\right)^2 \\
&= \left((i)^2\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4) On a vu à la question précédente que $Z^8 = 1$.
Or $2025 = 8\times 253+1$.
Donc $Z^{2025} = Z^{1+8\times 253} = Z\times\left(Z^8\right)^{253} = Z\times 1^{253} = Z$.
Donc

$$Z^{2025} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Exercice 4.

1) Pour que $f(x)$ soit définie, il faut et il suffit que $1+e^x+e^{2x} > 0$.
Or, $1+e^x+e^{2x}$ est la somme de trois termes strictement positifs donc est strictement positif.
Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}$.

3) Nous avons déjà vu que le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et le numérateur est la somme de deux termes strictement positifs.
Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.

Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est une bijection de $I = \mathbb{R}$ sur $J =]0; +\infty[$.

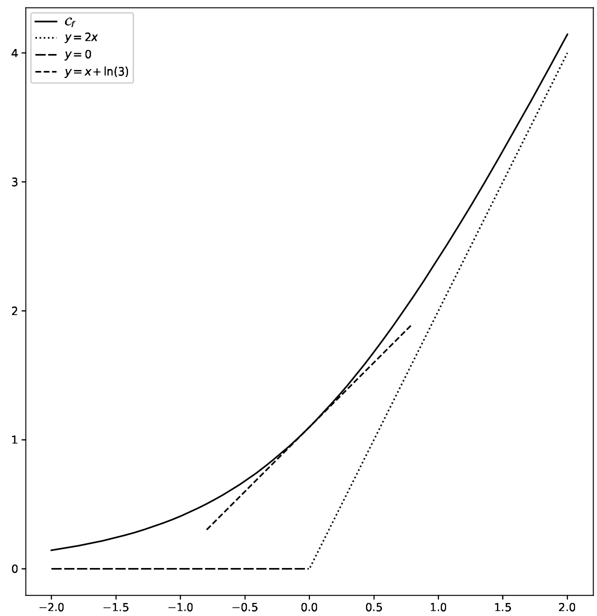
4) $f'(0) = \dfrac{2+1}{1+1+1} = 1$ et $f(0) = \ln(3)$.
Donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est

$$y = x + \ln(3)$$

5) Soit x un réel.
$f(x) - f(-x) = \ln\left(e^{2x} + e^{x} + 1\right) - \ln\left(e^{-2x} + e^{-x} + 1\right) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} + e^{x} + 1}{e^{-2x} + e^{-x} + 1}\right)$
Donc $f(x) - f(-x) = \ln\left(e^{2x}\dfrac{e^{2x} + e^{x} + 1}{e^{2x} \times (e^{-2x} + e^{-x} + 1)}\right) = 2x + \ln\left(\dfrac{e^{2x} + e^{x} + 1}{1 + e^{x} + e^{2x}}\right)$
Donc $f(x) - f(-x) = 2x$.

6) D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x) - 2x = f(-x)$.
Or, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(-x) \to 0$.
Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

7)



Exercice 5.

Calcul des premiers termes

1) $A_2 = 1$, $A_3 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$.
$B_0 = 1$, $B_1 = 1 + 2 = 3$.
$C_0 = 1$, $C_1 = 1 + \dfrac{2}{2} = 2$ et $C_2 = 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{4} = 4$.

Calcul de A_n

2) Soit k un entier ***supérieur ou égal à 2***.
$\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3) En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)} \\
&= 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{par télescopage} \\
&= \frac{2(n-1)}{n}
\end{aligned}.$$

Calcul de B_n

4) Pour un entier $a \in \mathbb{N}$ et un entier $b \in [\![0; a-1]\!]$, la formule de Pascal permet d'affirmer que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

En posant $a = n + k$ et $b = n$, $b < a \Leftrightarrow k > 0$.
Donc, pour tout entier n et tout entier $k > 0$, la formule de Pascal s'écrit

$$\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}\right] \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} \quad \text{par télescopage} \\
&= \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de C_n

6)

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k+1}{n+1}}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\binom{n+j}{n+1}}{2^{j-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \quad \text{en posant, dans la première somme, } j = k+1 \\
&= 1 + \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+1+k}{n+1}}{2^k} \quad \text{après un nouveau changement d'indice}
\end{aligned}$$

Il manque le terme d'indice $k = n+1$ dans la somme : il s'écrit $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+2}}$ (en développant le $1/2$ en facteur).

Or $\dfrac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{2n+1-n-1}}{2^{n+2}} = \dfrac{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}}{2^{n+2}} = \dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+2}}$.

Donc $C_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{n+1+k}{n+1}}{2^k} = \frac{1}{2}C_{n+1}$.

La suite C est donc géométrique de raison 2.

7) On en déduit que $C_n = 2^n C_0 = 2^n$.