Techniques de calcul différentiel

I. Généralités

Ex. 4.1
- Montrer que $\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2, ab\leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- Montrer que $\forall (a;b;c)\in\mathbb{R}^3, ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$.
- Montrer que $\forall (a;b;c)\in\mathbb{R}^3, 3ab+3bc+3ac\leq (a+b+c)^2$.

Ex. 4.2 $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1..., a_n$ des réels.
- Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i^2=n$ alors $\forall i\in [\![1;n]\!], a_i=1$.
- Est-il possible que $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i^2>n$?
- Trouver un exemple où $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i^2<n$.

Ex. 4.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $|x+1|\leq 1$ b. $|x-1|\leq|x-2|$ c. $|2x-1|-|x+1|<|3x+5|$

Ex. 4.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $(y+1)(y+3)>(y+1)^3$ b. $(y+2)(y+3)y\leq 4y+8$
c. $\lambda\in\mathbb{R}$ donné, $(\lambda^2-1)\,y^2+2\lambda y+1\geq 0$

Ex. 4.5 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x, en effectuant un ***changement d'inconnue*** :
$(A) : 2e^{2x}-5e^x+2\geqslant 0$ $(B) : \cos(3x)+2\cos(x)\geqslant 0$ où $x\in\,]-\pi;\pi]$

Ex. 4.6 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique, admettant 2 et 3 comme période. Montrer que f est 1-périodique.

II. Études de fonctions

Ex. 4.7
- Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[, \ln(x)\leqslant x-1$.
- En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1}\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}$.
- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, 1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant 1$.
- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+, x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin(x)\leqslant x$.
- Montrer que $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \dfrac{2x}{\pi}\leqslant\sin(x)\leqslant x$.
- Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1 et tout réel x ***non nul et supérieur ou égal à*** -1, on a :

$$(1+x)^n>1+nx$$

Ex. 4.8 (Cor.) Étude et représentation graphique de

$$f : x\mapsto\left|x-\sqrt{1-x^2}\right|$$

Ex. 4.9 Étudier la fonction $P : x\in\mathbb{R}\mapsto x^5-5x^4+10x^3-10x^2$.
Montrer que $P(x)=0$ possède exactement deux solutions réelles, dont une (que l'on ne cherchera pas à obtenir) dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

Ex. 4.10 Étudier la fonction $g : x\in\mathbb{R}\mapsto e^x\,(x^3-3x^2+6x-5)$.
Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution réelle x_0 (que l'on ne cherchera pas à obtenir).
Montrer plus précisément que $x_0\in[1;2]$.

Ex. 4.11 Ensemble de définition, parité, étude et représentation graphique de $h : x\mapsto\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
On montrera que h est bijective de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser et on donnera une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 4.12 (Cor.) [**] Soit $0 < a \leqslant b$.

On pose $f : x \in]0;+\infty[\mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Étudier la monotonie de f. En déduire l'inégalité

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

Ex. 4.13

1. Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, on a les inégalités
$$\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$$
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(p+1)n}$. Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex. 4.14 ***Sinus cardinal*** [**] On appelle ***sinus cardinal*** et on note sinc la fonction définie par

$$\text{sinc} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

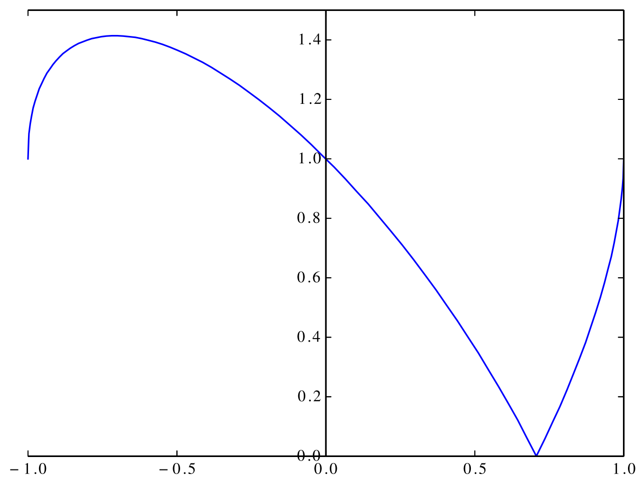
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. Déduire de la question précédente que sinc est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Quel est l'ensemble de dérivabilité ***à priori*** de sinc ?
4. Montrer que sinc est dérivable en 0. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble sur lequel sinc est dérivable ?
5. Montrer que sinc possède un maximum que l'on précisera.
6. Montrer que sinc$'$ change de signe une infinité de fois.
7. Tracer une représentation graphique rapide de sinc (on ne cherchera pas à préciser les intervalles sur lesquels sinc est monotone).
8. Montrer que sinc$'$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrections

Cor. 4.8 : $f(x)$ est définie si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$. Donc f est définie sur $[-1;1]$.
Étudions le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$:
$x - \sqrt{1-x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1;0]$. Considérons l'autre cas possible à savoir $x \in [0;1]$. Dans ce cas, l'inégalité porte sur deux quantités positives, la fonction carré est bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc
$x \leqslant \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1-x^2 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En résumé :

- si $x \in \left[-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$. Sur cet intervalle, f est dérivable si et seulement si $1-x^2 \neq 0$. Donc f est dérivable sur $\left]-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On a alors :
$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. On étudie à nouveau le signe de $f'(x)$ qui est celui de son numérateur.
Or on remarque que $-x - \sqrt{1-x^2} = (-x) - \sqrt{1-(-x)^2} = u - \sqrt{1-u^2}$ en posant $u = -x$. L'étude du signe de cette dernière expression a déjà été faite et on conclut que
$f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-1;\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- de même, si $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ et une étude similaire conduit à prouver que f est strictement croissante sur cet intervalle.

Valeurs de x	-1		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	||	+	0	-	-2||2	+	||
Variations de $f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↗	1



Cor. 4.12 :

- Commençons par justifier que f est bien définie sur $]0;+\infty[$.
  Soit $x>0$. $0<a\leqslant b$ donc $0<ax\leqslant bx$ et par conséquent $1<1+ax\leqslant 1+bx$.
  Donc $\ln(1+ax)$ et $\ln(1+bx)$ sont bien définies et strictement positives.
  Donc $f(x)=\dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est bien définie (son numérateur et son dénominateurs sont définis, et son dénominateur ne s'annule pas).
  De plus, cette étude montre aussi que $0<f(x)\leqslant 1$.
  f est aussi dérivable comme quotient de fonctions dérivables et, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$,
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx)-\frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx)-b(1+ax)\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2(1+ax)(1+bx)} \end{aligned}$$
  L'étude précédente prouve que le dénominateur de cette expression est strictement positif, $f'(x)$ est donc du signe de son numérateur.
- Étudions donc le signe de $a(1+bx)\ln(1+bx)-b(1+ax)\ln(1+ax)$.
  $$\begin{aligned} & a(1+bx)\ln(1+bx)-b(1+ax)\ln(1+ax)\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(1+bx)\ln(1+bx)\geqslant b(1+ax)\ln(1+ax) \\ \underset{\times\frac{1}{abx}}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\frac{1}{bx}+1\right)\ln(1+bx)\geqslant\left(\frac{1}{ax}+1\right)\ln(1+ax) \end{aligned}$$
  Montrons que cette dernière inégalité est toujours vérifiée : comme $bx\geqslant ax>0$, il suffit pour cela de démontrer que la fonction
  $g: u>0\mapsto\left(\dfrac{1}{u}+1\right)\ln(1+u)=\dfrac{(u+1)\ln(u+1)}{u}$ est croissante.
  Or, $g'(u)=\dfrac{(\ln(u+1)+1)u-(u+1)\ln(u+1)}{u^2}=\dfrac{u-\ln(u+1)}{u^2}\geqslant 0$
  car $\forall u\in]-1;+\infty[, \ln(1+u)\leqslant u$.
  Donc g est bien croissante, et par conséquent, $g(bx)\geqslant g(ax)$.
  D'après ce qui précède, ceci prouve que $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)\geqslant 0$.
- Nous avons donc montré que f est croissante.
  Il s'agit d'en déduire maintenant que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2$.
  Par hypothèse, $0<a\leqslant b$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc aussi
  $0<\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{1}{a}$.
  Or f est croissante, donc $f\left(\frac{1}{b}\right)\leqslant f\left(\frac{1}{a}\right)$.
  Ceci achève la démonstration puisque :
  $$f\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(1+1)}=\frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(2)}$$
  $$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\ln(1+1)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$
  et qu'en remplaçant dans l'inégalité précédente on obtient, comme l'énoncé l'affirmait,
  $$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2$$