

Techniques de calcul différentiel

I. Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni d'une relation d'ordre totale $\leq$. Cette relation est *compatible avec les opérations du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$:



Définition 4.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations)

La relation d'ordre $\leq$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- compatibilité avec l'addition : $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- compatibilité avec la multiplication : $(x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \Rightarrow x \times z \leq y \times z$.

Elle est dite *compatible avec les opérations du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Ex. 4.1 Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cor. 4.1



Remarque

L'exemple précédent montre que des notions comme celle de croissance d'une fonction ne sont pas définies pour les fonctions à valeurs complexes. Il s'ensuit que certains théorèmes se généralisent mal - ou pas du tout - à de telles fonctions.

Il convient donc de bien comprendre d'emblée qu'il existe une différence fondamentale entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, même si certaines généralisations sont possibles.

Propriété 4.2

Si x et y sont deux réels, alors

$$x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y \quad xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \quad x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \text{ ont même signe}$$

$$0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad 0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$$

Démonstration

 Remarque

On peut reformuler les propriétés

$$x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y \quad 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad 0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$$

de la façon suivante :

- $x \in \mathbb{R} \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Attention cependant :

- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ *n'est pas décroissante* sur $\mathbb{R}_*$ puisque $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est *décroissante* sur $\mathbb{R}_-$.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Les notions de majorant, minorant, bornes, maximum, minimum et extremums vues pour les entiers au chapitre 2 se généralisent à $\mathbb{R}$ puisqu'il est totalement ordonné. Notamment :

Proposition 4.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Ex. 4.2 Quels sont les majorants et les minorants de $\mathbb{R}_+$? de $\mathbb{R}_-$?

Cor. 4.2

Ex. 4.3 $[0; 1[$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Mêmes questions pour $\mathbb{R}_-$.

Cor. 4.3

Ex. 4.4 Soit $E = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, y = x + \frac{1}{x} \right\}$.

E est-il minoré ? Possède-t-il un minimum ?

Cor. 4.4

I.3. Valeur absolue**Définition 4.4**

| Pour tout réel x , on appelle *valeur absolue de x* le maximum de x et de $-x$.

**Notation**

| On note $|x| = \max\{x; -x\}$ la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de la proposition suivante sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 4.5 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ • $x > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ • $- x \leq x \leq x$ • $x - y = r \Leftrightarrow (x = y - r \text{ ou } x = y + r)$ • $x = x \Leftrightarrow x \geq 0$ • $xy = x \times y$ • si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x ^n$ • $x \leq r \Leftrightarrow (-r \leq x \leq r)$ | <ul style="list-style-type: none"> • $x < r \Leftrightarrow (-r < x < r)$ • $x \geq r \Leftrightarrow (x \geq r \text{ ou } x \leq -r)$ • $x = r \Leftrightarrow (x = r \text{ ou } x = -r)$ • $x - y \leq r \Leftrightarrow (y - r \leq x \leq y + r)$ • $x = -x \Leftrightarrow x \leq 0$ • si $x \neq 0$, $\left \frac{y}{x}\right = \frac{ y }{ x }$ |
|--|---|

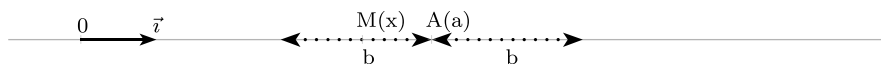
Proposition 4.6 (Inégalités triangulaires)

Soit x et y des réels. Alors

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Démonstration**i Remarque**

- Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$. De plus, si $r \geq 0$, alors
 $|x| \leq r \Leftrightarrow x^2 \leq r^2$ et
 $|x| \geq r \Leftrightarrow x^2 \geq r^2$.
- On rapporte la droite réelle à un repère $(O; \vec{i})$. Pour deux réels x et y , la valeur absolue $|y - x|$ s'interprète géométriquement comme la distance entre les points $M(x)$ et $N(y)$: $MN = |y - x|$. Étant donnés deux réels a et b , l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq b$ d'inconnue x s'interprète donc géométriquement comme l'ensemble des points $M(x)$ dont la distance au point $A(a)$ est inférieure à b .



Ex. 4.5 Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $(x + 5)(2x - 1) \leq (3x - 7)(2x - 1)$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

Cor. 4.5

Ex. 4.6 Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Cor. 4.6

Ex. 4.7 Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3$.

Cor. 4.7

Ex. 4.8 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x + 1| + |x - 3| < 6$.

Ex. 4.9 (Cor.) [*] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

I.4. Partie entière d'un nombre réel



Définition 4.7

Pour tout réel x , on appelle *partie entière de x* le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x .

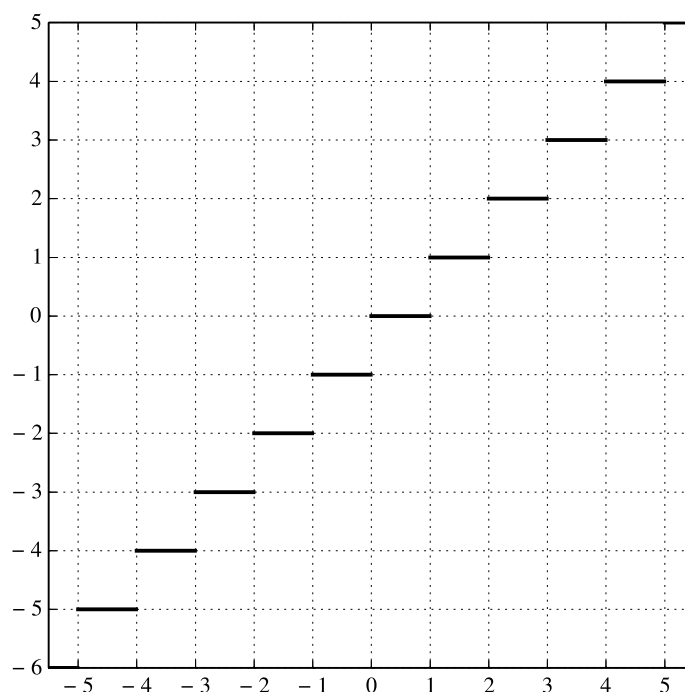
Cet entier existe toujours d'après la propriété 2.5 (propriété fondamentale des entiers).



Notation

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$



Propriété 4.8

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

3) Si $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Démonstration



Méthode

Les deux premières propriétés ci-dessus permettent de traiter la plupart des problèmes faisant intervenir la fonction partie entière. ***Il faut donc absolument les connaître.***

Ex. 4.10

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que

$$\begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n &= a_n + b_n \sqrt{3} \\ 3b_n^2 &= a_n^2 - 1 \end{cases}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^n} \right\rfloor$ est un entier impair.

Cor. 4.10

II. Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce qui suit, on rapporte le plan à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

II.1. Représentations graphiques



Définition 4.9

Une fonction f réelle d'une variable réelle n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ D et d'arrivée A et une manière d'obtenir l'image $f(x) \in A$ de tout élément $x \in D$. Lorsque l'ensemble de départ est omis, on appelle ***ensemble de définition*** de la fonction f , souvent noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ donnée peut être calculée. Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.

Proposition 4.10

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ de f est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

C'est la propriété 1.39 démontrée page 23. Elle est illustrée par la figure 4.1 page 54.

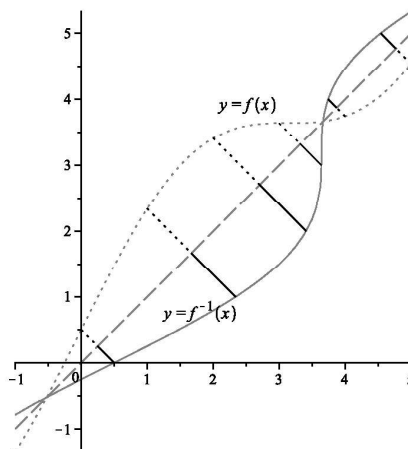


FIGURE 4.1 – Représentations graphiques de f et f^{-1}

II.2. Symétries des représentations graphiques



Définition 4.11 (Parité d'une fonction)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $-x \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow A$ une fonction.

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.



Définition 4.12 (Périodicité d'une fonction)

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $x + p \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow A$ une fonction.

On dit que f est **périodique de période** p si pour tout $x \in D$, $f(x + p) = f(x)$. On dit alors que p est **une période** de f .



Remarque

- Dans la définition précédente, on peut aussi admettre sans modification de signification les périodes strictement négatives.
- Si p est une période, alors tout multiple entier (positif) non nul de p en est aussi une.
- On dit souvent que p est **la** période d'une fonction périodique lorsque p est la plus petite période strictement positive de f .

Ex. 4.11 Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Écrire à l'aide de quantificateurs :

f est paire $\Leftrightarrow$
 f est impaire $\Leftrightarrow$
 f est périodique de période $p \in \mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow$
 f est périodique $\Leftrightarrow$

Proposition 4.13 (Symétrie de la représentation graphique d'une fonction)

- Si f est une fonction paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
- Si f est une fonction périodique de période p , alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $p\vec{u}$.

Ex. 4.12 Quelles sont les symétries de la représentation graphique de la fonction $\cos$?

Cor. 4.12

II.3. Bornes et extremums d'une fonction**Définition 4.14 (Majorant, minorant)**

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow A$ une fonction.

On dit que f est **majorée par** $M \in \mathbb{R}$ et on appelle M **majorant de** f , si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.

On dit que f est **minorée par** $m \in \mathbb{R}$ et on appelle m **minorant de** f , si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$.

Une fonction qui est minorée par m et majorée par M est dite **bornée** par m et M .

**Remarque**

Dire qu'une fonction est majorée (respectivement minorée, bornée) équivaut à dire que son image $f(D)$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Les propriétés des parties de $\mathbb{R}$ bornées s'adaptent donc immédiatement aux fonctions réelles bornées.

Ex. 4.13 Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Écrire à l'aide de quantificateurs :

f est majorée par $M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
 f est majorée $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$
 f est minorée $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$
 f n'est **pas** majorée $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Proposition 4.15 (Caractérisation des fonctions bornées)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$. La fonction $f : D \rightarrow A$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration**Définition 4.16 (Maximum global, minimum global)**

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow A$ une fonction.

On dit que f admet un **maximum global** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est **le maximum** de f .

On dit que f admet un **minimum global** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \geq f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est **le minimum** de f .



Important ! Unicité des extremums globaux

La proposition 4.3 permet d'affirmer que si une fonction admet un maximum global (ou un minimum global), alors celui-ci est unique. Cependant, ce maximum (ou ce minimum) possède alors un **ou plusieurs** antécédent(s).



Notation

On note $\max_{x \in D} f(x)$ le maximum global de f s'il existe et $\min_{x \in D} f(x)$ le minimum global de f s'il existe.

Ex. 4.14 La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x + \frac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 4.14

Ex. 4.15 La fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 4.15

II.4. Monotonie



Définition 4.17 (Croissance, décroissance, monotonie)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \rightarrow A$ une fonction et I une partie de D .

- On dit que f est **croissante sur** I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est **strictement croissante sur** I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- On dit que f est **décroissante sur** I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est **strictement décroissante sur** I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- On dit que f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I et **strictement monotone sur** I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

**Important ! Intervalles et monotonie**

On a défini la croissance, la décroissance ou la monotonie de f sur une partie I quelconque de l'ensemble de départ D . Mais il vaut mieux penser à cette partie comme à un **intervalle**. En effet, les propriétés caractérisant la monotonie d'une fonction dérivable par exemple (voir proposition 4.28) sont valables sur un intervalle. Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

Proposition 4.18 (Stricte monotonie et injectivité)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \rightarrow A$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.

La réciproque est fausse.

Démonstration

Ex. 4.16 Démontrer que si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ est une bijection strictement monotone, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est strictement monotone, de même monotonie que f .

Cor. 4.16**Méthode : Montrer qu'une fonction n'est pas monotone**

Pour montrer qu'une fonction f n'est pas monotone sur un intervalle I , il suffit de trouver un triplet $(a; b; c) \in I^3$ tels que

$$(a < b < c) \text{ et } \left((f(a) < f(b) \text{ et } f(c) < f(b)) \text{ ou } (f(a) > f(b) \text{ et } f(c) > f(b)) \right)$$

Ex. 4.17 Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{1}{x}$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cor. 4.17**II.5. Monotonie et continuité****Théorème 4.19**

Soit f une fonction continue sur **un intervalle** I .

f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Théorème 4.20 (Bijection continue)

Soit f une fonction continue sur **un intervalle** I .

f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone.

De plus,

- $f(I)$ est alors un **intervalle** ;
- la bijection réciproque f^{-1} est alors continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f .

**Méthode**

Pour montrer qu'une fonction f continue **de l'intervalle** I sur J est bijective :

- on montre qu'elle est strictement monotone ;
- comme le théorème précédent **permet d'affirmer que J est un intervalle**, on vérifie que $f(I) = J$ en calculant les limites de f aux bornes de I .

Ex. 4.18 (Cor.) Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]1; \infty[\\ x & \mapsto e^{2x} + e^x + 1 \end{cases}$ est bijective.

**Méthode**

Si f est bijective continue de I (**intervalle**) sur J (**intervalle**), alors elle est strictement monotone et la propriété de stricte croissance (ou décroissance) est **une équivalence logique**. Autrement dit, appliquer une même bijection aux deux membres d'une inégalité donne une inégalité équivalente.

Ex. 4.19 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle $\ln(x-1) - \ln(2x+1) > 0$ **en commençant par déterminer son ensemble de définition**.

Faire de même pour l'inéquation d'inconnue x réelle $\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) > 0$.

Remarque ?

Cor. 4.19

III. Éléments de calcul différentiel

La plupart des résultats donnés dans cette section sont admis et ne seront démontrés que dans le cadre du chapitre consacré à la dérivabilité.

Dans toute la section, I et J sont deux **intervalles** réels **contenant une infinité de points**.

III.1. Définition

**Définition 4.21 (Dérivabilité en un point)**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I . On dit que f est **dérivable en a** si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ admet une limite finie en a . Cette limite s'appelle alors le **nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque

- Si f est dérivable en a , on peut aussi écrire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.
- Pour $x \neq a$, le quotient $\tau_f(x, a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle le **taux d'accroissement de la fonction f entre a et x** ; il représente la pente de la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ du plan rapporté à un repère.
- Le nombre dérivé représente donc la pente de la droite limite obtenue lorsque M tend vers A : cette droite est la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$.

Définition 4.22 (Tangente en un point)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I . Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite d'équation cartésienne

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

est la **tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point $A(a, f(a))$** .

Cette définition est illustrée par la figure 4.2.

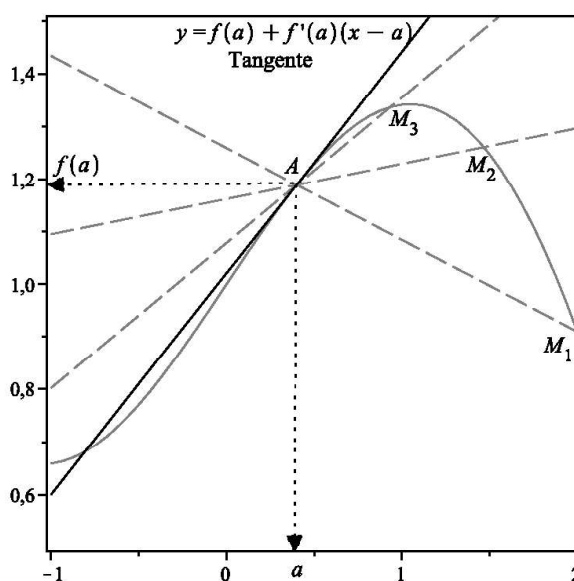


FIGURE 4.2 – Nombre dérivé et tangente en un point

Remarque

La notation de Leibniz $f'(a) = \frac{dy}{dx}$ est un **moyen mnémotechnique** de retenir l'équation réduite de la tangente :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a} \Rightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$$


Définition 4.23 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, $f' : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$ s'appelle la **fonction dérivée** de f .

On note f'' la dérivée de f' si elle existe, etc. et pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f .

III.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.24 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I .

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la **combinaison linéaire** $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I , l'inverse $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I , le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 4.25 (Composition)

Si $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Théorème 4.26 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable en tout $y \in J$ pour lequel $f' \circ f^{-1}(y) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.

Cette proposition est illustrée par la figure 4.3 page 61.

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions satisfaisant aux hypothèses des propositions précédentes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

$$(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$$

La formule de dérivation d'une fonction composée a été vue sur des exemples en terminale :

$$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

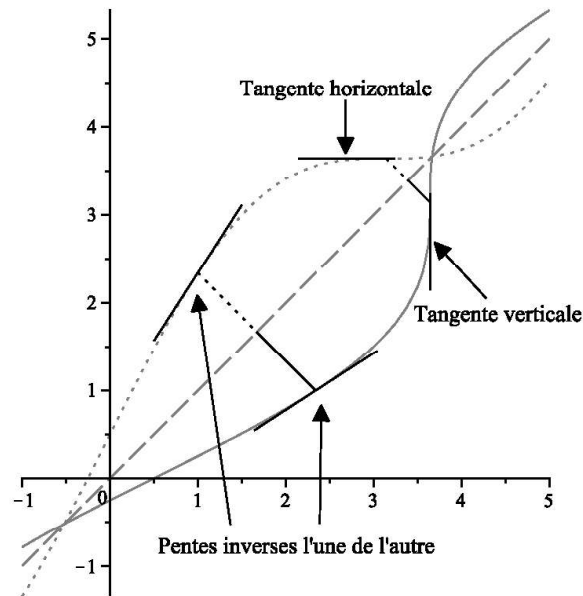


FIGURE 4.3 – Dérivées d’une bijection et de sa réciproque

III.3. À propos des notations et de l’interprétation physique

Étant donnés deux points $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ (avec $x_1 \neq x_2$) appartenant à la droite (non parallèle à l’axe des ordonnées) d’équation $y = ax + b$, on a

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Donc $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$ ou encore $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Le coefficient directeur d’une droite est donc égal à

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Remplacer Δ par d signifie implicitement que l’on opère des « différences infinitésimales » c’est-à-dire que l’on calcule une **limite** :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Lorsque l’on souhaite dériver une **fonction de plusieurs variables**, il devient important de préciser **par rapport à quelle variable** on effectue la dérivation. La notation adoptée (en mathématiques comme en physique) est alors la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x}(a, b, c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(a + h, b, c) - E(a, b, c)}{h} \\ \frac{\partial E}{\partial y}(a, b, c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(a, b + h, c) - E(a, b, c)}{h} \\ \frac{\partial E}{\partial z}(a, b, c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(a, b, c + h) - E(a, b, c)}{h} \end{aligned}$$

On parle alors de **dérivée partielle par rapport à x** (respectivement par rapport à y ou par rapport à z). Le symbole ∂ remplace le d des « différences infinitésimales » afin de bien insister sur

le fait que la fonction que l'on dérive dépend de plusieurs variables et que l'on dérive partiellement par rapport à l'une d'entre elles.

Ex. 4.20 Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Trouver une primitive G de g , c'est-à-dire une fonction vérifiant $G' = g$.

Cor. 4.20

Ex. 4.21 Calculer les dérivées partielles de

$h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - \frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$.

Cor. 4.21

Ex. 4.22 Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cor. 4.22

III.4. Propriétés des fonctions dérivables

On rappelle que I est un *intervalle réel contenant une infinité de points*.

Proposition 4.27 (Fonction constante)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur I .

Proposition 4.28 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I .

- Si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .



Définition 4.29 (Zéro isolé d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que $x_0 \in I$ est un **zéro isolé de f** si

- $f(x_0) = 0$;
- il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$ et tel que f ne s'annule pas sur $J \setminus \{x_0\}$.

Proposition 4.30 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **continue et dérivable** sur I . Alors f est strictement monotone si et seulement si f' est de signe constant sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

 Remarque

La condition donnée dans la proposition 4.30 s'interprète (et s'utilise) de la façon suivante :

- la dérivée f' est de signe constant, donc la fonction est monotone ;
- si de plus f' ne s'annule qu'en des **points isolés** alors la fonction est strictement monotone.

Ex. 4.23 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + \sin(x) \end{cases}$. Montrer que f est bijective.

III.5. Étude pratique des fonctions**Définition 4.31 (Asymptotes à une représentation graphique)**

- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée **asymptote verticale** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée **asymptote horizontale** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et s'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée **asymptote oblique** $\mathcal{C}_f$.

**Méthode : Étude et représentation graphique d'une fonction f**

- 1) On commence, s'il n'est pas donné, par obtenir l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
- 2) On cherche les symétries (parité, périodicité...), on réduit l'intervalle d'étude.
- 3) On cherche l'**ensemble de dérivabilité** c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels le nombre dérivé $f'(x)$ est défini.
- 4) On calcule f' , éventuellement on cherche à prolonger cette dérivée aux points où elle n'était pas **à priori** définie.
- 5) On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le **tableau de variations de f** : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes ; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f .
- 6) On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f .
- 7) On construit la représentation graphique et on y place :
 - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale ;
 - les asymptotes ;
 - éventuellement quelques tangentes, notamment lorsqu'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de sa dérivée.

Ex. 4.24 Étudier la fonction $L : x \mapsto \frac{2 \ln(x)}{\ln(x^2 + 1)}$ après avoir déterminé son ensemble de définition. Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 4.25 Étudier la fonction $S : x \mapsto \frac{2e^x}{1+e^x} - 1$ après avoir déterminé son ensemble de définition.

[**Indication** : il peut être utile de chercher à savoir si S possède des symétries...]

Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 4.26 Soit $R : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$.

- 1) R admet-elle des symétries ?
- 2) Étudier le sens de variations de R .
- 3) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_R .
- 4) Tracer une représentation graphique rapide de R .

Ex. 4.27 Les fonctions L, S, R des exercices précédents sont-elles bornées ? possèdent-elles des extremums sur $\mathbb{R}$?



Méthode : Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ dérivable est bijective

D'après la proposition 4.20, on vérifie que

- la dérivée f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en des points isolés ;
- les limites ou les valeurs de f aux bornes de I donnent bien les bornes de $J : f(I) = J$.

Pour obtenir une expression de la bijection réciproque f^{-1} , on tente de résoudre l'équation l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x .

Si on parvient à le faire, on obtient alors $x = f^{-1}(y)$, c'est-à-dire une expression de la bijection réciproque.

Ex. 4.28 Les fonctions L, S, R sont-elles bijectives ?

Si oui, de quel intervalle sur quel intervalle ? donner une expression de leur bijection réciproque.

Résoudre une inéquation/démontrer une inégalité

Pour résoudre une inéquation (ou démontrer une inégalité) du type $A(x) \geq B(x)$:

- 1) on peut éventuellement utiliser les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en partant d'inégalités satisfaites par hypothèses ou déjà démontrées ;
- 2) **sinon, on commence par obtenir son ensemble de définition.**

Ensuite, **on écrit** $A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \geq 0$ afin de se ramener à **l'étude du signe de** $A(x) - B(x)$.

Puis :

- il est souvent fructueux d'utiliser la règle selon laquelle « le signe d'un produit est le produit des signes » en **faisant un tableau de signes** ;
- étudier le signe des expressions entre valeurs absolues puis **faire un tableau de signes** permettant d'envisager tous les cas possibles se révèle souvent synthétique et efficace ;
- il peut être intéressant d'étudier la fonction $A - B$ pour montrer qu'elle passe par un minimum (ou par un maximum suivant les cas).

Ex. 4.29 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$$

Ex. 4.30 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle :

$$(I) : \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 > \frac{-1}{2}$$

III.6. Primitives d'une fonction continue



Définition 4.32

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Proposition 4.33 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{cases}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Corollaire 4.34

Si f est continue sur $[a; b]$, alors elle admet une infinité de primitives sur $[a; b]$ et quelle que soit la primitive F choisie, on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ noté $[F(t)]_a^b$.

IV. Correction des exercices

Cor. 4.8 : On a $|x + 1| = x + 1 \Leftrightarrow x \geq -1$ et $|x - 3| = x - 3 \Leftrightarrow x \geq 3$. On en déduit que l'inégalité à résoudre est donnée suivant la valeur de x par le tableau suivant :

Valeur de x	-1	3
Inégalité à résoudre	$-x - 1 - x + 3 < 6$	$x + 1 - x + 3 < 6$
	$x + 1 + x - 3 < 6$	

Sur $] -\infty; -1]$, l'inégalité équivaut donc à $-2x + 2 < 6$ d'où un premier ensemble de solutions $S_1 =] -2; -1]$. De même, sur $[-1; 3]$, l'inégalité devient $4 < 6$ qui est trivialement vraie d'où $S_2 = [-1; 3]$. Enfin, sur $[3; +\infty[$, on résout $2x < 8$ qui conduit à $S_3 = [3; 4[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $] -2; 4[$.

Cor. 4.9 : On distingue plusieurs cas :

- si x et y sont positifs, alors l'inégalité à démontrer est $\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$ qui est équivalente à $(x+y)(1+x)(1+y) \leq x(1+y)(1+x+y) + y(1+x)(1+x+y)$. En développant partiellement le membre de droite, cette inégalité devient $(x+y)(1+x)(1+y) \leq x(1+y)(1+x) + xy(1+y) + y(1+x)(1+y) + xy(1+x)$ c'est-à-dire après simplification $xy(2+x+y) \geq 0$. Or cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$.
- si $-x \leq y \leq 0$, alors $0 \leq x+y \leq x$.
Donc $g(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x+y+1-1}{1+x+y} = 1 - \frac{1}{1+x+y} \leq 1 - \frac{1}{1+x} = g(x)$.
La fonction g étant positive, on a a fortiori $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

- les autres cas se ramènent aux précédents en échangeant le rôle de x et y et en utilisant la parité de g . Par exemple, pour $y \leq -x \leq 0$, on a $g(x+y) = g(-x-y) \leq g(-y)$ d'après le cas précédent, etc.

Cor. 4.18 : f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer qu'elle est strictement monotone et que $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0$.

Donc f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est donc un intervalle et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$ et f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1; +\infty[$.