

Trigonométrie

Ex. 5.1 Simplifier, pour x réel quelconque :

$$\begin{aligned} A &= \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & B &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ C &= \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ D &= \cos(x - \pi) + \sin\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

Ex. 5.2 Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ex. 5.3 Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
Simplifier :

$$\begin{aligned} U &= \sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x) & V &= \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)} \\ W &= \cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) & Y &= \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} \end{aligned}$$

Ex. 5.4 (Cor.) Soit n un entier naturel et x un réel.

Simplifier la somme $S(x) = \sum_{k=0}^n k \cos(kx)$.

Ex. 5.5 Soit n un entier naturel et x un réel.

Simplifier la somme $S(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \cos(kx)$.

Ex. 5.6 Résoudre le système suivant d'inconnues $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre a réel :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Ex. 5.7 Soit n un entier naturel et x un réel tel que $\cos(x) \neq 0$.

Simplifier la somme $T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Indication : écrire $\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx})$ puis...

Ex. 5.8 Soit $z \in \mathbb{U}$.

Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$?

Ex. 5.9 Quelle relation y a-t-il entre les fonctions suivantes ?

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$g : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$h : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ex. 5.10 Étudier (ensemble de définition, parité, périodicité, variations, représentation graphique, etc...) la fonction définie par

$$T(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

Corrections

Cor. 5.4 : Notons $T(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et $U(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$.

T est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, T'(x) = S(x)$.

Par ailleurs $T(x) = \operatorname{Im}(U(x))$. Or, pour $x \neq 0[2\pi]$:

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} \\
 &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
 &= \frac{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})}{e^{i\frac{n+1}{2}x} (e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x})} \\
 &= \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{e^{i\frac{x}{2}x} \frac{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}} \\
 &= e^{i\frac{x}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } T(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{et } S(x) = T'(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \right]}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \right] \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ou encore

$$S(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Si } x = 0[2\pi], S(x) = \frac{n(n+1)}{2}.$$