Maths - DM n°2 - Pour le lundi 10 novembre,

Inéquations, trigonométrie, analyse

Exercice 1.

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(A_1) \ : \ |3-x| \leqslant |2x+4| \qquad (A_2) \ : \ (x-3)\big(2x^2+6x+5\big) > x^2-9$$

Exercice 2.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) - 4\cos(x)\cos(2x)$.

1) Linéariser $\cos(x)\cos(2x)$.
2) Simplifier l'expression de $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
3) Montrer f et F sont 2π-périodiques.
4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   Indication : on pourra exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ (uniquement).
5) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.
6) Construire le tableau de variations de F sur $[-\pi;\pi]$.
7) Représenter graphiquement F.

Exercice 3.

Fonction W de Lambert

Soit f la fonction définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{cases}$$

1) Étudier f et construire son tableau de variations.
2) Montrer que f est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   Conformément au résultat de cette question, on note $W = f^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction f.
   Notamment, W est définie sur J et à valeurs dans $[-1;+\infty[$.
3) Soit $x \in J$. Que vaut $W(x)e^{W(x)}$?
4) Montrer que W est dérivable sur $\left]\frac{-1}{e};+\infty\right[$ et que

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{e};+\infty\right[, W'(x) = \frac{1}{x+e^{W(x)}}$$

Extrait de Wikipedia : *Jean-Henri Lambert (1728-1777) est un mathématicien et philosophe. Il s'est illustré en mathématiques pures (il a démontré que le nombre π est irrationnel) et en mathématiques appliquées.*