Maths - Feuille d'exos n° 7

Fonctions de référence

I. Logarithmes et exponentielle

Ex. 7.1 Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$.

1. Compléter : n s'écrit avec exactement q chiffres si et seulement si
   .... $\leq n <$ ....
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\log_{10}(n)$ pour que n s'écrive avec q chiffres.
3. ***Sans calculatrice :*** en utilisant le fait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, donner une valeur approchée de $\log_{10}(2)$.
4. ***Sans calculatrice :*** donner le nombre approximatif de chiffres du plus grand nombre premier connu $2^{136\,279\,841} - 1$ (record datant de 2024).
   [Réponse : ce nombre premier possède 41 024 320 chiffres en base 10.]

Ex. 7.2 (Cor.) Soient $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dérivables où u vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Montrer que $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Ex. 7.3 On rappelle que, d'après l'exercice 2 du cours,

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Que peut-on dire des limites de la forme $1^{+\infty}$?

Calculer de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Interpréter ces résultats en terme de formes indéterminées.

Ex. 7.4 Calculer, si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 4x + 1 - \ln(x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x + 1$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3+1}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

Ex. 7.5 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)^x$
Quelle conclusion peut-on en tirer sur la valeur que pourrait avoir 0^0 ?
Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ et préciser votre réponse.

Ex. 7.6 Résoudre les équations d'inconnue x réelle :
$(E_1) : \log_{10}(x+2) - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-1)$.
$(E_2) : x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

II. Fonctions trigonométriques et réciproques

Ex. 7.7 Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Ex. 7.8 Calculer $A = \mathrm{Arctan}(2) + \mathrm{Arctan}(5) + \mathrm{Arctan}(8)$.

Ex. 7.9 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan x = 1$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2(x)$

d. $\cos(12x) - \cos(2x) = \sqrt{3}\sin(5x)$

Ex. 7.10 [*] Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) \quad \cos(5x) - 3\cos(3x) + 5\cos(x) = 0$$

Ex. 7.11 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$.

Ex. 7.12 Soit α un réel donné. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6}$

b. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

c. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$

d. $\operatorname{Arcsin}(2x-1) = \alpha$

e. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$

Ex. 7.13 (Cor.) $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

Ex. 7.14

1. Montrer que $\forall x \in]0;1], \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
2. Montrer que, pour un ensemble J à préciser, $\forall x \in J, \operatorname{Arccos}(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

Ex. 7.15 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(x) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Que vaut $\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)$? Que vaut $\operatorname{Arctan}(2-\sqrt{3})$?

III. Fonctions hyperboliques

Ex. 7.16 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$.
2. Linéariser $\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}(x)$ (c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ ou $x \mapsto \operatorname{sh}(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$).
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Ex. 7.17 (Cor.) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$.
2. On pose $p_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

   Calculer $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) p_n(x)$ pour $x \neq 0$ et en déduire une expression simplifiée de $p_n(x)$.
3. On pose $p(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$.

   Déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$.
4. Vérifier que p est continue en 0.

Ex. 7.18

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{\operatorname{ch}(x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} - \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

   Simplifier $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k x)}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

IV. Divers, études de fonctions

Ex. 7.19

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

Ex. 7.20 Montrer que $\forall t \in]1;+\infty[, \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t < e < \left(1+\dfrac{1}{t-1}\right)^t$.

Ex. 7.21 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

Corrections

Cor. 7.2 : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} = f(x)$ est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Par ailleurs, c'est une fonction dérivable comme composée et produit de fonctions qui le sont et :
$f'(x) = \left[v'(x)\ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)}\right] e^{v(x)\ln(u(x))}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = v'(x)\ln(u(x))\, u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$$

Cor. 7.9 : a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$S_a = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, résultat donné par la propriété 7.14 du cours.
b. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in S_b = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ car $\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \cos x & = & 0 \\ \texttt{ou} & & \\ \sin^2 x & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = \pm\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \tfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \texttt{ou}\ x = -\tfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$S_c = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
d. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
Donc $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$.
On cherche $a + b = 12x$ et $a - b = 2x$ et on obtient $a = 7x$ et $b = 5x$.
Donc l'équation équivaut à

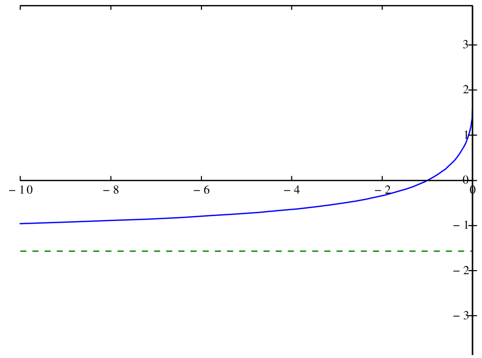
$$-2\sin(7x)\sin(5x) = \sqrt{3}\sin(5x) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \sin(5x) & = & 0 \\ \texttt{ou} & & \\ \sin(7x) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$S_d = \left\{\frac{k\pi}{5}, -\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, \frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cor. 7.13 : $f(x)$ est définie si et seulement si

- $\frac{1+x}{1-x}$ est défini d'une part ;
- et $-1 \leqslant \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1$ d'autre part.

Étudions donc $g : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.
g est définie (et dérivable) sur $G = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et sur cet ensemble
$g(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2+x-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$.
Donc $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{2}{1-x} \leqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 1 - x \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant 0$.
f est donc définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (l'étude précédente restant valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).
On a alors $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x}}}$. Après simplification, on obtient donc en tenant compte du fait que $x < 0$ et que par conséquent $1 - x > 1 > 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$ (asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-\pi}{2}$) et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



Cor. 7.17 :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(2\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} = \dfrac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}{2} = 2\,\mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\alpha)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$p_n(x)\,\mathrm{sh}\left(\tfrac{x}{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) =$$

$\dfrac{p_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $q_n(x) = p_n(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or son premier terme vaut $q_0(x) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

3. On écrit pour $x \neq 0$:

   $2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\,\mathrm{sh}'(0) = x\,\mathrm{ch}(0) = x$.

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, p(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{x}$.

   De plus, pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(0) = 1 = p(0)$.

4. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = p(0)$.

   Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(0) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = 1 = p(0)$. p est bien continue.