

# Équations différentielles et calcul intégral

## I. Intégrales et primitives

**Ex. 8.1** Déterminer les primitives suivantes en précisant le (ou les) intervalle(s) de validité de la primitive obtenue :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_x^x t(t^2 - 1)^7 dt & F_2(x) &= \int_x^x (t^2 - 1)^7 dt \\ F_3(x) &= \int_x^x \sqrt{5t + 4} dt & F_4(x) &= \int_x^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} \\ F_5(x) &= \int_x^x \frac{2}{\sqrt{6 - 6t^2}} dt & F_6(x) &= \int_x^x \frac{2t + 5}{(t^2 + 5t + 8)^4} dt \\ F_7(x) &= \int_x^x \frac{1}{t \ln(t)} dt & F_8(x) &= \int_x^x \frac{1}{e^t + 1} dt \\ F_9(x) &= \int_x^x \frac{2t}{(t - 1)(3 - t)} dt & F_{10}(x) &= \int_x^x \sin^2(t) \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

**Ex. 8.2** Calculer  $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$ .

**Ex. 8.3** En effectuant une intégration par partie, donner l'ensemble des primitives de Arccos, Arcsin et Arctan (avec le ou les intervalles sur lesquels ces primitives sont valables).

**Ex. 8.4** Donner l'ensemble des primitives de  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$ ,  $g : x \mapsto \frac{1 + 2x}{x^2 - 6x + 9}$  et  $h : x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x - 1}$  ainsi que le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) ces primitives sont valables.

**Ex. 8.5** En effectuant le changement de variable  $u = \cos(t)$ , calculer

$$F(x) = \int_x^x \frac{dt}{\sin(t)}$$

et précisez les intervalles sur lesquels cette primitive est définie.

En déduire une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$  en précisant les intervalles sur lesquels elle est définie.

**Ex. 8.6** Soit  $I = ]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $F_n : x \in I \mapsto \int_0^x \tan^n(t) dt$ .

1. Donner, pour  $x \in I$ , l'expression de  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}$ .
3. Donner, pour  $x \in I$ , l'expression de  $F_3(x)$  et  $F_4(x)$ .
4. Déduire de la question 2. que, pour tout réel  $x \in I$  et pour tout entier  $n$ ,

$$F_{2n}(x) = (-1)^n x + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{\tan^{2k-1}(x)}{2k-1}$$

5. Donner une formule similaire pour  $F_{2n+1}$ .

**Ex. 8.7** Soient  $f : x \in ]0; +\infty[ \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$  et

$$F : x \in ]0; +\infty[ \mapsto \int_1^x f(t) dt.$$

1. Montrer que  $F$  est bien définie, continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
2. Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .
3. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) \geq 0$ .
4. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(\frac{1}{x}) = F(x)$ .

5. Montrer que  $\forall x \in ]0; 1]$ ,  

$$\frac{1+x \ln(x)-x}{2} \leq F(x) \leq 1+x \ln(x)-x.$$

**Ex. 8.8** Calculer chacune des intégrales suivantes, à l'aide du changement de variable indiqué :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(t) \cos(t)}{2 + \cos(t)} dt \text{ en posant } u = \cos(t);$$

$$J = \int_0^{\ln(2)} \frac{1+e^t+e^{2t}}{1+e^t} dt \text{ en posant } u = e^t;$$

$$K = \int_1^{64} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} \text{ en posant } t = x^6.$$

## II. Équations différentielles

**Ex. 8.9** Résoudre pour  $x \in \mathbb{R}$

$$(E) : y' - 2xy = \operatorname{sh}(x) - 2x \operatorname{ch}(x)$$

**Ex. 8.10** Résoudre pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$(E) : y' + \tan(t)y = \sin(2t)$$

puis donner l'unique solution telle que  $y(0) = 1$ .

**Ex. 8.11** Résoudre les équations différentielles suivantes pour  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $(E_1) : y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0$
2.  $(E_2) : y'' - 2y' + y = e^x \cos(x)$
3.  $(E_3) : y'' + y' - 2y = \sin^3(x).$

**Ex. 8.12** Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le ou les intervalles de résolution choisis :

1.  $ty' + y = \cos(t)$
2.  $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$
3.  $xy' \ln(x) - y = 3x^2 \ln^2(x)$
4.  $y'' - y = \operatorname{sh}(x)$
5.  $y'' + y' = 4x^2 e^x$  avec  $y(0) = e$  et  $y'(0) = 0$ .

## III. Compléments

**Ex. 8.13 (Cor.)** [\*] Trouver les fonctions  $x : t \mapsto x(t)$  et  $y : t \mapsto y(t)$  telles que

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}$$

Indication : poser  $u = x + y$  et  $v = x - y$ .

**Ex. 8.14** [\*\*] Déterminer les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser  $g(t) = f(e^t)$ .

## Corrections

**Cor. 8.13** : On suit l'indication ! Posons  $u = x + y$  et  $v = x - y$  et cherchons des équations différentielles satisfaites par  $u$  et  $v$ .

En sommant les deux équations du système proposé :  $u'' = 2u' - u$

En faisant la différence des deux équations :  $v'' = v$ .

La première conduit à  $u = (At + B)e^t, (A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

La seconde conduit à  $v = Ce^t + De^{-t}, (C, D) \in \mathbb{R}^2$ .

Et on conclut en écrivant  $x = (u + v)/2$  et  $y = (u - v)/2$ .