Maths - DS n°2 - Mercredi 19 novembre, 2 heures

Nombres complexes, fonctions de référence

L'usage d'une calculatrice est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Démontrer que $\forall x \in [-1;1], \cos\big(\text{Arcsin}(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$.
2) Donner la définition de la fonction Arccos.

Exercices

Exercice 1.

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0 \qquad (E_2) : z^3 + (4-2i)z^2 + (19-14i)z + 30 - 20i = 0$$

$$(E_3) : (z-1)^4 = 1 \qquad (E_4) : e^z = \sqrt{3} - i$$

Indications : $15^2 = 225$ et $17^2 = 289$.

Exercice 2.

1) Montrer que
$$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$
2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.
3) Plus précisément, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.
4) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
5) Soit r un réel.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

Exercice 3.

Soit u la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Pour x un réel quelconque, donner $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.

3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{u_n}{2}$$

4) Déduire des questions précédentes la limite de la suite u.

Exercice 4.

Soit $h : x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1) Quel est l'ensemble de définition de h ?
   Dans la suite, on note D cet ensemble.

2) Montrer que h est dérivable sur D et calculer h'.

3) Montrer que $\forall x \in D$, $h(x) = \text{Arcsin}(x)$.

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de montrer que, pour x réel et n entier naturel, $\cos(nx)$ peut s'écrire en fonction de $\cos(x)$ uniquement et d'étudier succinctement ces fonctions.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel, x un réel.
Si l'on parvient à montrer que $\cos(nx)$ peut s'écrire en fonction de $\cos(x)$ uniquement, on notera P_n cette fonction, de sorte que

$$\cos(nx) = P_n(\cos(x))$$

1) En utilisant une formule du cours, montrer que $P_2(X) = 2X^2 - 1$.

2) Développer $\cos(3x)$.

3) Donner une expression de P_3.

4) Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 2$.
   Montrer que $2\cos\big((n-1)x\big)\cos(x) = \cos(nx) + \cos\big((n-2)x\big)$.

5) Déduire de la question précédente que, pour tout entier n, $\cos(nx)$ peut s'écrire en fonction de $\cos(x)$ uniquement et que, de plus, pour $n \geqslant 2$

$$P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

6) Donner une expression de P_4 et de P_5.

7) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall X \in [-1;1], P_n(X) \in [-1;1]$.