Correction DS n°2

Exercice 1.

$$(E_1) : z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$$

$\Delta = (2+i)^2 - 4 \times (-1+7i) = 4 - 1 + 4i + 4 - 28i = 7 - 24i$

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 7 \\ 2ab & = & -24 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & 7 + 25 \\ ab & < & 0 \\ 2b^2 & = & 25 - 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 16 \\ ab & < & 0 \\ b^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

On choisit par exemple $\delta = 4 - 3i$.

Donc E_1 a deux solutions qui sont

$$z_1 = \frac{2 + i + 4 - 3i}{2} = 3 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2 + i - 4 + 3i}{2} = -1 + 2i$$

$$(E_2) : z^3 + (4-2i)z^2 + (19-14i)z + 30 - 20i = 0$$

$z = -2$ est racine évidente.

On peut donc factoriser le premier membre de (E_2) par $z + 2$: plus précisément

$z^3 + (4-2i)z^2 + (19-14i)z + 30 - 20i = (z+2)\left(z^2 + 2(1-i)z + 15 - 10i\right)$.

Donc $(E_2) \Leftrightarrow (z+2)\left(z^2 + 2(1-i)z + 15 - 10i\right) = 0 \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{rcl} z & = & -2 \\ & \text{ou} & \\ z^2 + 2(1-i)z + 15 - 10i & = & 0 \end{array}\right.$

$\Delta = 4(1-i)^2 - 4 \times (15 - 10i) = -8i - 60 + 40i = -60 + 32i$.

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & -60 \\ 2ab & = & 32 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{60^2 + 32^2} = 4\sqrt{15^2 + 8^2} = 4\sqrt{289} = 68 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & 8 \\ ab & > & 0 \\ 2b^2 & = & 128 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 4 \\ ab & > & 0 \\ b^2 & = & 64 \end{array}\right.$$

On choisit par exemple $\delta = 2 + 8i$.

Donc (E_2) a trois solutions, $z_0 = -2$ ainsi que

$$z_1 = \frac{-2 + 2i + 2 + 8i}{2} = 5i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2 + 2i - 2 - 8i}{2} = -2 - 3i$$

$$(E_3) : (z-1)^4 = 1$$

Il est immédiat, d'après la forme de l'équation (E_3) que $z - 1 \in \mathbb{U}_4$.

Il y a donc quatre solutions à l'équation qui sont

$$\mathcal{S} = \{1+1; 1+i; 1-1; 1-i\} = \{2; 1+i; 0; 1-i\}$$

$$(E_4) : e^z = \sqrt{3} - i$$

On met $\sqrt{3} - i$ sous forme trigonométrique :
$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{3+1} = 2$.
Donc $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{-1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
On cherche alors $z = a + ib$ sous forme algébrique, et par propriétés du cours :
$e^a = 2$ donc $a = \ln(2)$ puis
$e^{ib} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $b = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Finalement, les solutions de (E_4) sont les complexes de la forme $z = \ln(2) - i\dfrac{\pi}{6} + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1) Montrons tout d'abord que $\forall x \in]0; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$.

   Pour cela, étudions la fonction $f : x \in]0; +\infty[\mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$ et montrons qu'elle est strictement négative.
   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée et
   $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x + 1 - x}{x^2(1+x)} = \dfrac{1}{x^2(1+x)}$.
   Donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui est un intervalle), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} = 0$.
   Donc f est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui prouve que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

   De même, en posant $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
   $g'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x - x - 1}{x(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ qui est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc g est décroissante sur cet intervalle et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = 0$.
   Donc g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui finit de prouver que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

2) D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1)$ par télescopage.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

3) Nous avons déjà démontré à la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrons l'autre partie de l'encadrement.

D'après la question 1), $\forall x \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)$, ce qui conduit, comme à la question précédente, après télescopage à

$\forall n > 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n)$.

Or la somme commence à l'indice $k=2$, donc en ajoutant 1 aux deux membres,

$\forall n > 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1+\ln(n)$.

Enfin, dans le cas où $n=1$, cette inégalité est en fait une égalité. On a donc finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$$

4) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

En utilisant l'encadrement de la question 1), et la stricte croissance de la fonction exp, on peut donc écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp\left(\frac{n}{n+1}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \exp\left(\dfrac{n}{n}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

5) On souhaite calculer, pour tout réel r, la limite $L_r = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$.

- Si l'on suppose $r > 0$, la démonstration de la question précédente s'adapte aussi à cette limite.

  En effet, $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{r}}\right)\right)$.

  En utilisant l'encadrement de la question 1) (qui n'est valable que pour $x > 0$, et c'est le cas ici en posant $x = \frac{n}{r}$), et la stricte croissance de la fonction exp, on peut donc écrire :

  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp\left(\frac{n}{1+\frac{n}{r}}\right) < \left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \exp(r)$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{1+\frac{n}{r}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{r}} = r$.

  Donc, d'après le théorème des gendarmes,

  $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

- Pour $r = 0$,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{0}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.

- Enfin, pour $r < 0$:

  $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(\frac{n+r}{n}\right)\right)$

  C'est-à-dire : $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(\frac{n}{n+r}\right)\right) = \exp\left(-n\ln\left(\frac{n+r-r}{n+r}\right)\right) = \exp\left(-n\ln\left(1-\frac{r}{n+r}\right)\right)$.

Or pour n suffisamment grand (on cherche la limite lorsque $n \to +\infty$), $-\dfrac{r}{n+r} > 0$ puisque r est négatif.

Une démonstration similaire à celle du premier point permet alors de démontrer que, là encore,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

- Enfin, comme $e^0 = 1$, on peut affirmer que pour tout réel r,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Exercice 3.

1) $u_1 = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$.
$u_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$.
$u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) Pour x un réel quelconque, on a d'après le cours $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

3) Montrons ***par récurrence*** que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{u_n}{2}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^0}\right) = \cos(\pi) = -1$ et $\dfrac{u_0}{2} = -1$.
Hérédité :
Supposons que pour n entier donné, on ait $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{u_n}{2}$.
Alors, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ d'après la question précédente.
Par ailleurs, $n+1 \geqslant 1$, donc $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$.
On en conclut donc que $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{u_n}{2} + 1 = \dfrac{u_n+2}{2}$
puis que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\dfrac{u_n+2}{4}} = \dfrac{\sqrt{u_n+2}}{2} = \dfrac{u_{n+1}}{2}$
Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{u_n}{2}$

4) La question précédente permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos(0) = 2$ (car cos est continue).
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 4.

1) $h(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est définie si et seulement si $1 - x^2 > 0$.
Or $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$.
Donc l'ensemble de définition de h est $D =]-1;1[$.

2) h est la composée de Arctan, dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'un quotient de fonctions dérivable sur D, donc est dérivable sur D.

De plus, $\forall x \in D$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2} \times \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^2} \times \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, $\forall x \in D, h'(x) = \text{Arcsin}'(x)$.
De plus $D =]-1;1[$ est un intervalle.
Donc il existe un réel r tel que $\forall x \in D, h(x) = \text{Arcsin}(x) + r$.
Or pour $x = 0$, $h(0) = \text{Arctan}(0) = 0$ et $\text{Arcsin}(0) = 0$ donc $r = 0$.
Donc

$$\forall x \in]-1;1[, \text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Exercice 5.

1) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = P_2(\cos(x))$ en posant $P_2(X) = 2X^2 - 1$.

2) En utilisant les nombres complexes :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathcal{R}e\left(e^{3ix}\right) \\
&= \mathcal{R}e\Big(\left(e^{ix}\right)^3\Big) \\
&= \mathcal{R}e\left(\cos^3(x) + 3\cos^2(x) \times i\sin(x) + 3\cos(x) \times (i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3\right) \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)
\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$.

3) D'après la question précédente, pour tout réel x, en utilisant le fait que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, on a :
$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\big(1 - \cos^2(x)\big) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = P_3(\cos(x))$
en posant

$$P_3(X) = 4X^3 - 3X$$

4) On suppose que $n \geqslant 2$.
Rappel :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
En effectuant la somme de ces deux dernières relations, on a donc :
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
Donc, en remplaçant a par $(n-1)x$ et b par x, on a, pour x réel quelconque :
$2\cos\big((n-1)x\big)\cos(x) = \cos\big((n-1)x + x\big) + \cos\big((n-1)x - x\big) = \cos(nx) + \cos\big((n-2)x\big)$.

5) ***Par récurrence double*** :
Initialisation : $\cos(0 \times x) = \cos(0) = 1 = P_0(\cos(x))$ en posant $P_0(X) = 1$.
$\cos(1 \times x) = \cos(x) = P_1(\cos(x))$ en posant $P_1(X) = X$.
Enfin, on a aussi obtenu $P_2(X) = 2X^2 - 1$ et $P_3(X) = 4X^3 - 3X$.
Hérédité : ***supposons que pour deux entiers n et $n+1$ donnés,*** $\cos(nx)$ et

$\cos((n+1)x)$ puissent s'écrire en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
Alors, d'après la question précédente,
$2\cos\big((n+1)x\big)\cos(x) = \cos((n+2)x) + \cos\big(nx\big)$
Donc $\cos((n+2)x) = 2\cos\big((n+1)x\big)\cos(x) - \cos\big(nx\big) = 2P_{n+1}(\cos(x)) \times \cos(x) - P_n(\cos(x))$.
En posant donc $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$, on vient donc de prouver que $\cos((n+2)x)$ s'écrit en fonction de $\cos(x)$ uniquement, plus précisément que
$\cos((n+2)x) = P_{n+2}(\cos(x))$.
Conclusion : la propriété est initialisée aux rangs 0 et 1, héréditaire à partir de ces rangs, donc, ***par récurrence double***, la propriété est vraie pour tout entier n.
De plus, l'hérédité a permis de montrer que la fonction P_{n+2} vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

6) $P_4(X) = 2XP_3(X) - P_2(X) = 2X\,(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
$P_5(X) = 2XP_4(X) - P_3(X) = 2X\,(8X^4 - 8X^2 + 1) - 4X^3 + 3X = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

7) On veut montrer que les valeurs de $P_n(X)$ sont comprises dans l'intervalle $[-1;1]$ lorsque X est lui aussi dans cet intervalle. Supposons donc que $X \in [-1;1]$.
cos est une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$: donc il existe $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = X$.
Donc $P_n(X) = P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ appartient bien à l'intervalle $[-1;1]$ puisque $\cos(nx)$ est borné par -1 et par 1.