Résolutions de systèmes linéaires

Dans l'ensemble du TD, on note $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Principe général

Notation

Étant donné un système de n équations à p inconnues, pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$, on note

- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{K}$, l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j$.

Définition 1.1 (Opérations élémentaires)

Les opérations correspondant aux deux notations données ci-dessus sont appelées ***opérations élémentaires sur les lignes*** d'un système linéaire.

Remarque

On ***retiendra*** les remarques suivantes :

- dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, ***il est absolument nécessaire que*** $\lambda \neq 0$;
- deux cas fréquents de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ sont :
  - ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ où $\lambda = 1 \neq 0$;
  - ⋆ $L_i \leftarrow \lambda L_i$ où $\lambda \neq 0, \mu = 0$.
- à priori, ***on ne peut effectuer qu'une seule opération élémentaire à la fois*** !

Le principe général de l'algorithme du pivot de Gauss est d'utiliser une ligne L_i du système pour éliminer une des inconnues de ***toutes les autres lignes*** à l'aide d'opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow \lambda L_j + \mu L_i$ avec $\lambda \neq 0$.
On recommence cette étape jusqu'à obtenir :

- ou bien un système possédant une équation ne faisant plus intervenir qu'une seule inconnue : dans ce cas, on peut calculer la valeur de cette inconnue puis de proche en proche obtenir la valeur de chacune des inconnues ce qui conduit à ***une unique solution pour le système*** ;
- ou bien un système où certaines inconnues (appelées ***inconnues principales***) peuvent être calculées en fonction des autres inconnues (appelées ***inconnues secondaires***) : ce cas conduit à une infinité de solutions puisque chaque valeur (réelle ou complexe) des inconnues secondaires fournit une solution du système ;
- un troisième cas possible est que la résolution du système fasse apparaître une ligne du type $0 = 1$, sans inconnue, qui conduit à un système sans solution.

Ex. 1.1 Résoudre le système d'inconnues $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & -1 \\ x & + & 16y & + & 81z & + & 256t & = & -5 \end{array}\right.$$

Ex. 1.2 Résoudre les systèmes d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 5 \\ x - 2y + 4z & = & 6 \\ x + 7y - 5z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 5 \\ x - 2y + 4z & = & 6 \\ x + 7y - 5z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ex. 1.3 Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Ex. 1.4 Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ x & & & - & z & = & 4 \end{array}\right.$$

Ex. 1.5 (Cor.) On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & b\cos C + c\cos B \\ b & = & c\cos A + a\cos C \\ c & = & a\cos B + b\cos A \end{array}\right.$$

1. Résoudre le système en considérant que les inconnues sont $\cos A$, $\cos B$ et $\cos C$ et que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre le système en considérant que les inconnues sont a, b et c et que $A + B + C = \pi$.
3. Montrer que dans tout triangle ABC en notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & b\cos C + c\cos B \\ b & = & c\cos A + a\cos C \\ c & = & a\cos B + b\cos A \end{array}\right.$$

Conclure.

Ex. 1.6 Résoudre suivant la valeur du paramètre $u \in \mathbb{R}$ le système

$$S : \left\{\begin{array}{rcrcl} (2u-1)x & + & (u+1)y & = & 2u+2 \\ (u-1)x & + & (u+1)y & = & u+1 \end{array}\right.$$

Ex. 1.7 Soient a, b, c et α quatre constantes réelles. Discuter et résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & \alpha \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & \alpha^2 \end{array}\right.$$

Ex. 1.8 [$*$] Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ réelles suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} & = & \dfrac{x_2}{a_2} & = & \cdots & = & \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & s \end{array}\right.$$

Ex. 1.9 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $x_j = ax_{j-1} + b$ et $x_1 = ax_n + b$.