

# Nombres réels et suites numériques

« Les considérations qui font l'objet de ce petit écrit remontent à l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l'École polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d'un fondement véritablement scientifique à l'arithmétique. En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition *que chaque grandeur qui croît constamment [et qui reste majorée] doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite*, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais [...] ce sentiment d'insatisfaction s'imposait tant à moi que je pris la ferme résolution d'y réfléchir sans relâche [...]. On dit constamment que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, et *pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité.* », extrait de *Continuité et nombres irrationnels*

Richard Dedekind<sup>1</sup>

Le point de départ de ce chapitre sera la propriété qui résulte du travail de **Dedekind** et de ses successeurs et qui *caractérise l'avantage théorique qu'il y a de travailler dans l'ensemble des nombres réels plutôt que dans l'ensemble des nombres rationnels*. Nous approfondirons la notion de nombre réel et en tirerons des conséquences pour l'étude des suites numériques et de *leurs limites*.

## I. L'ensemble des nombres réels

### I.1. Rappels et pré-requis

#### Ensembles usuels de nombres

Il convient d'emblée de bien comprendre que la notion de nombre réel repose :

- *sur l'intuition géométrique* de *droite munie d'un repère*, qui contient en elle-même l'idée de *continuité* ;
- *sur les intuitions algébriques* de *corps* (voir la définition 3.10) et de *relation d'ordre compatible avec les opérations* (voir les définitions 2.1 et 4.1).

1. **Richard Dedekind**(1831;1916), mathématicien allemand ayant contribué à fonder la logique mathématique contemporaine, notamment la construction des ensembles de nombres.

À ce titre les trois définitions précédentes *doivent être revues et réappris* si besoin est.

On rappelle de plus que :

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \times)$  et  $(\mathbb{C}, +, \times)$  sont trois exemples de corps, les *deux premiers uniquement étant munis d'une relation d'ordre totale compatible avec leurs opérations* ;
- on a la suite d'inclusions strictes  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  où  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des nombres décimaux c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{N}{10^n}$  avec  $(N, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  ;
- on appelle *nombres irrationnels* les éléments de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .



### Définition 9.1 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  est *majorée par*  $M \in \mathbb{R}$  et on dit que  $M$  est un *majorant de*  $E$  si .....

On dit qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  est *minorée par*  $m \in \mathbb{R}$  et on dit que  $m$  est un *minorant de*  $E$  si .....

Une partie qui est minorée par  $m$  et majorée par  $M$  est dite .....



### Définition 9.2 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  possède *un plus grand élément*  $G \in \mathbb{R}$  aussi appelé *maximum de*  $E$  si .....

On dit qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  possède *un plus petit élément*  $P \in \mathbb{R}$  aussi appelé *minimum de*  $E$  si .....

### Proposition 9.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de  $\mathbb{R}$  possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

## I.2. Propriété de la borne supérieure, inférieure



### Définition 9.4 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit  $\mathcal{A}$  une partie *non vide* de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $S$  est *la borne supérieure* de  $\mathcal{A}$  si  $S$  est *le plus petit majorant* de  $\mathcal{A}$  ; si  $\mathcal{A}$  n'est pas majorée, on convient que sa borne supérieure est  $+\infty$ .
- On dit que  $I$  est *la borne inférieure* de  $\mathcal{A}$  si  $I$  est *le plus grand minorant* de  $\mathcal{A}$  ; si  $\mathcal{A}$  n'est pas minorée, on convient que sa borne inférieure est  $-\infty$ .

Les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble vide ne sont pas définies.



### Notation

À condition que l'un ou l'autre existe, on note  $S = \sup \mathcal{A}$  et  $I = \inf \mathcal{A}$ .

**Ex. 9.1** Pour les ensembles suivants, donner, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure :  
 $\mathbb{N}$ ,  $]1; 2]$ ,  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < 2\}$

### Remarque

Si  $\mathcal{A}$  admet un plus grand élément, alors cet élément est aussi la borne supérieure de  $\mathcal{A}$ .

En effet, ....

De même si  $\mathcal{A}$  admet un plus petit élément, alors c'est aussi la borne inférieure de  $\mathcal{A}$ .

Les réciproques sont fausses (voir exercice précédent).

### Axiome 9.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ ou *propriété de la borne supérieure*)

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet **dans  $\mathbb{R}$**  une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  admet **dans  $\mathbb{R}$**  une borne inférieure.

### Remarque

Cette propriété distingue le corps des nombres réels de celui des nombres rationnels. Elle **doit être connue**. Elle exprime la **continuité** de la droite réelle et complète la remarque précédente : pour une partie **non vide**  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$

- $\mathcal{A}$  majorée **équivaut à**  $\sup \mathcal{A}$  existe ;
- $\max \mathcal{A}$  existe **implique**  $\sup \mathcal{A}$  existe, mais la réciproque est fausse.

L'ensemble des majorants d'une partie quelconque  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  est

- vide si  $\mathcal{A}$  n'est pas majorée,
- $\mathbb{R}$  si  $\mathcal{A}$  est vide,
- l'intervalle  $[\sup \mathcal{A}; +\infty[$  sinon. En effet, d'après l'axiome précédent, l'ensemble des majorants possède toujours un plus petit élément si  $\mathcal{A}$  est non vide majoré, c'est la borne supérieure.

Ces remarques s'adaptent à la borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ .



### Méthode

Pour démontrer que  $S$  est la borne supérieure de  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  majorée on montre :

- 1) que  $S$  est un majorant de  $\mathcal{A}$  ;
- 2) que tout majorant de  $\mathcal{A}$  est supérieur ou égal à  $S$ .

Pour obtenir la borne supérieure d'une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ , on peut aussi commencer par calculer l'ensemble des majorants, puis obtenir le plus petit d'entre eux.

La méthode s'adapte à l'obtention de la borne inférieure de  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

### Ex. 9.2

- 1) Soient  $m$  et  $n$  deux entiers strictement positifs.

$$\text{Montrer que } 0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2) Soit  $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

Montrer que  $A$  admet une borne supérieure  $S$  et une borne inférieure  $I$  et les calculer.

- 3)  $S$  est-elle le maximum de  $A$  ?  
 $I$  est-elle le minimum de  $A$  ?

### I.3. Approximations décimales



#### Définition 9.6

$(x_0; x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

Si  $|x - x_0| \leq \epsilon$ , on dit que  $x_0$  est **une approximation décimale** de  $x$  à  $\epsilon$  près. De plus :  
si  $x_0 > x$ , on dit que  $x_0$  est une valeur approchée de  $x$  par **excès**.  
si  $x_0 < x$ , on dit que  $x_0$  est une valeur approchée de  $x$  par **défaut**.

#### Théorème 9.7 (Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ )

L'ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux est dense dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \exists x \in \mathbb{D} \text{ tel que } a < x < b$$

#### Démonstration hors programme

Soient  $a < b$  deux réels. On a donc  $b - a > 0$ .

Notons  $n = \lfloor \log_{10}(b - a) \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$ .

$$n + 1 \leq \log_{10}(b - a) < n + 2 \Rightarrow 10^{n+1} \leq b - a < 10^{n+2} \Rightarrow 10 \leq \frac{b - a}{10^n} < 100.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{a}{10^n} < \frac{a}{10^n} + 10 \leq \frac{b}{10^n}.$$

$$\text{On conclut en posant } N = \left\lfloor \frac{a}{10^n} + 9 \right\rfloor \in \mathbb{Z} \text{ qui vérifie } \frac{a}{10^n} < N \leq \frac{a}{10^n} + 9 < \frac{b}{10^n} \text{ d'où } a < \frac{N}{10^{-n}} < b.$$

#### Corollaire 9.8

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

#### Démonstration

#### Corollaire 9.9

Pour tout réel  $x$  et tout réel  $\epsilon > 0$ , il existe une approximation décimale de  $x$  à  $\epsilon$  près, que ce soit par défaut ou par excès.

#### Démonstration

## I.4. Intervalles réels

On rappelle que les intervalles réels ont été définis au chapitre 1 page 17 pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  par :

- **Intervalles fermés :**

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

- **Intervalles semi-ouverts :**

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, [a; b[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

$$[a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, ]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

- **Intervalles ouverts :**

$$]a; b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, ]a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, ]-\infty; b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

et  $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ .

En particulier,  $\emptyset = [1; 0] = ]1; 0] = ]0; 0[$  est un intervalle réel (à la fois fermé, semi-ouvert et ouvert).

### Remarque

Le théorème 9.7 peut s'énoncer à l'aide des intervalles sous la forme :

« Pour tout intervalle réel  $I$  ouvert non vide, il existe un nombre décimal  $d$  tel que  $d \in I$  ».

### Lemme 9.10

Étant donnée une partie **non vide**  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  :

- 1) si  $\mathcal{A}$  est majorée et possède par conséquent une borne supérieure  $S$ , alors quel que soit  $x < S$ , il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x < x' \leq S$ ;
- 2) si  $\mathcal{A}$  est minorée et possède par conséquent une borne inférieure  $I$ , alors quel que soit  $x > I$ , il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x > x' \geq I$ ;
- 3) si  $\mathcal{A}$  n'est pas majorée, alors quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x < x'$ ;
- 4) si  $\mathcal{A}$  n'est pas minorée, alors quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x' < x$ .

### Démonstration

### Proposition 9.11

Une partie  $\mathcal{X}$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{X}$ , on a  $[u, v] \subset \mathcal{X}$ .

### Démonstration

Ex. 9.3 (Cor.) [\*]  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (x; y) \in A \times B, x \leq y$ .

- 1) Montrer que  $\sup A$  et  $\inf B$  existent et que  $\sup A \leq \inf B$ .
- 2) Montrer que  $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$ .

## II. Introduction aux suites

### II.1. Définitions



#### Définition 9.12 (Suites)

On appelle **suite réelle** tout élément de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et **suite complexe** tout élément de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Par extension, si  $A$  est une **partie infinie** de  $\mathbb{N}$ , tout élément de  $\mathbb{R}^A$  est aussi appelé suite réelle et tout élément de  $\mathbb{C}^A$  est aussi appelé suite complexe.

Dans ce qui suit, on notera  $\mathbb{K}$  pour désigner  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



#### Notation

Si  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  est une suite, on préfère généralement comme pour les familles finies la notation  $u_0, u_1, u_2, \dots$  pour les images de la suite  $u$ .

On peut cependant aussi noter  $u(0), u(1), u(2), \dots$  ces images.

La **suite elle-même** est notée  $u$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Attention à ne pas confondre  $u_n$  qui est l'image de  $n$  par la suite  $u$  et  $u$  elle-même.**



#### Remarque

De façon évidente, la restriction  $u|_I$  d'une suite à une partie finie  $I \subset \mathbb{N}$  est une famille finie.

Les notions de suite et de famille finie sont donc intimement liées.



#### Définition 9.13 (Égalité de deux suites)

Deux suites  $u$  et  $v$  sont **égales** si :

- elles sont **définies sur la même partie**  $A \subset \mathbb{N}$  ;
- $\forall n \in A, u_n = v_n$ .

On supposera à partir de maintenant que les suites sont définies sur  $\mathbb{N}$  sauf indication contraire.



#### Définition 9.14 (Suites particulières)

Étant donnée  $u$  une suite réelle ou complexe, on dit :

- que  $u$  est **constante** s'il existe un réel ou un complexe  $a$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$  ;
- que  $u$  est **stationnaire** s'il existe un réel ou un complexe  $a$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$  ;
- que  $u$  est **périodique** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n + p \in A$  et  $u_{n+p} = u_n$ .

La période de la suite est alors le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  satisfaisant cette propriété.



#### Remarque

Une définition alternative du mot **période** désigne **tout entier satisfaisant la propriété donnée**. Auquel cas, il existe **une infinité de périodes** pour une suite périodique et on

- demanderai souvent de donner *la plus petite période* de la suite.



### Définition 9.15 (Propriété valable « à partir d'un certain rang »)

Étant donné un prédicat  $P$  dépendant d'une variable  $x \in \mathbb{K}$ , on dira que la suite  $u$  vérifie  $P$  **à partir d'un certain rang** si il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $P(u_n)$  soit vraie.

Ex. 9.4 Écrire à l'aide de quantificateurs :

$u$  vérifie  $P$  **à partir d'un certain rang** si et seulement si .....

ou plus simplement .....

Reformuler le fait qu'une suite est stationnaire.

$u$  est stationnaire si et seulement si .....

## II.2. Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de multiples façons. On retiendra les trois modes de définition suivants illustrés chacun par un exercice :

### a) De façon explicite

Ex. 9.5 On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = (-1)^n \end{cases}$ .

Montrer que  $u$  est périodique et préciser sa période.

**Cor. 9.5**

### b) De façon implicite

Ex. 9.6 Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $u_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $e^{u_n} - 1 = u_n + n$ .

**Cor. 9.6**

### c) Par récurrence

Ex. 9.7 On considère la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$ .

Montrer que lorsqu'elle est définie, cette suite est périodique. On précisera notamment les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles la suite est définie et la période de la suite suivant la valeur de  $u_0$ .

**Cor. 9.7**



### Remarque

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, la **démonstration par récurrence** est un outil **indispensable**. Il faut toujours l'avoir à l'esprit.

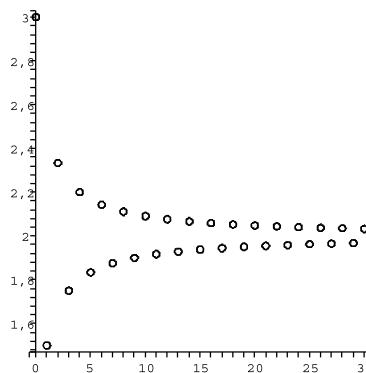
## II.3. Définitions spécifiques aux suites réelles



### Définition 9.16 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une *suite réelle*  $u$  est l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(n, u_n)$  obtenu lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .

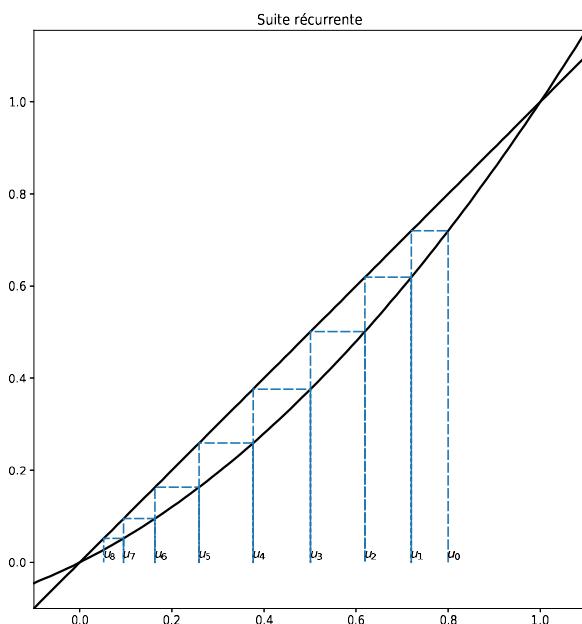
Exemple : représentation graphique de la suite  $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ .



### Définition 9.17 (Représentation graphique d'une suite récurrente)

Lorsque la suite est définie par récurrence  $u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ , il est souvent plus aisé pour observer son « comportement » (on parle plutôt de sa *dynamique*) de la représenter graphiquement en traçant la représentation graphique de la fonction  $f$ , la droite d'équation  $y = x$ , puis en utilisant ces deux représentations graphiques pour obtenir de proche en proche les valeurs des termes de la suite  $u$  sur l'axe des abscisses.

Exemple : représentation graphique de la suite  $u : \begin{cases} u_0 = \frac{4}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ .



### Définition 9.18 (Suites majorées, minorées)

On dit qu'une *suite réelle*  $u$  est **majorée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

On dit qu'une *suite réelle*  $u$  est **minorée** s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .



### Remarque

Comme il n'existe pas de relation d'ordre totale sur  $\mathbb{C}$  compatible avec les opérations  $+$  et  $\times$ , les notions de suites majorées et minorées ne sont pas définies sur  $\mathbb{C}$ . Cependant, la définition suivante est valable pour les suites réelles *et complexes* :



### Définition 9.19 (Suites bornées)

On dit qu'une suite *réelle ou complexe*  $u$  est **bornée** si la suite réelle  $|u|$  est majorée.

### Proposition 9.20

Une suite *réelle*  $u$  est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

### Démonstration



### Définition 9.21 (Suites monotones)

On dit qu'une *suite réelle*  $u$  est **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .

On dit qu'une *suite réelle*  $u$  est **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ .

On dit qu'une *suite réelle* est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement** croissante ou **strict-**

- *tement* décroissante, et par conséquent *strictement* monotone.



### Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite  $u$  on étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

Cependant, dans le cas d'une suite  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  définie par récurrence,  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$  dépend de la valeur de  $u_n$ .

Dans ce cas, pour montrer que la suite est monotone, on cherchera des *intervalles*  $I \subset \mathbb{R}$  tels que

- $\forall x \in I, f(x) \in I$  : on dit que l'intervalle  $I$  est *stable par*  $f$  ;
- $g$  est de signe constant sur  $I$ .

Cette méthode sera précisée lors du chapitre sur la continuité.

**Ex. 9.8** Soit  $u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$  (voir représentation graphique précédente).

Montrer que si  $u_0 \in [0; 1]$ , alors  $u$  est décroissante.

### Cor. 9.8

## III. Suites arithmétiques, géométriques et récurrentes linéaires

### III.1. Suites arithmétiques



#### Définition 9.22

Une suite  $u$  est dite *arithmétique* s'il existe un nombre  $r$  (réel ou complexe) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

$r$  est appelé *raison* de la suite  $u$ .

#### Propriété 9.23

$u$  est une suite arithmétique si et seulement si  $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ .

#### Démonstration

#### Proposition 9.24 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n \frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.

### Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section II.5.

## III.2. Suites géométriques



### Définition 9.25

Une suite  $u$  est dite **géométrique** s'il existe un nombre  $q$  (réel ou complexe) tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$ .  
 $q$  est appelé **raison** de la suite  $u$ .

### Propriété 9.26

$u$  est une suite géométrique si et seulement si  $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$ .

### Démonstration

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites arithmétiques.

### Proposition 9.27 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

### Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section II.5.

### Corollaire 9.28

Quels que soient  $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}, x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$ .

## III.3. Suites récurrentes linéaires



### Définition 9.29

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite définie pour  $a, b \in \mathbb{K}$  par  $u$  :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

### 8 Remarque

Si  $a = 1$ , on retrouve le cas particulier des suites arithmétiques, et si  $b = 0$  on retrouve celui des suites géométriques.

### Proposition 9.30

Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Soit  $u$  une suite arithmético-géométrique définie par  $u_{n+1} = au_n + b$  ( $a \neq 1$ ). Alors :

$u$  est la somme d'une suite géométrique  $v$  de raison  $a$  et d'une suite constante  $c$  vérifiant la même relation de récurrence que  $u$ .

### Démonstration

### 9 Remarque

On peut faire une analogie entre les suites arithmético-géométriques et les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (aussi curieux que cela puisse paraître au premier abord!).

En effet, considérons l'équation  $y' = ay + b$  avec  $a \neq 0$ . Pour obtenir ses solutions, il faut :

- ..... ;
- ..... ;
- .....
- .....

### 3 Définition 9.31

On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie pour  $a, b \neq 0 \in \mathbb{K}$  par

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_1 \in \mathbb{K} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On appelle *équation caractéristique associée* à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation d'inconnue  $r \in \mathbb{C}$

$$r^2 - ar - b = 0, \text{ de discriminant } \Delta = a^2 + 4b$$

### Proposition 9.32

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  en résolvant l'équation caractéristique dans  $\mathbb{C}$  puis

- si  $\Delta \neq 0$  en écrivant  $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$  où  $z_1, z_2$  sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  doivent être calculées de sorte à ce que  $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$  et  $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$  ;

- si  $\Delta = 0$  en écrivant  $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$  où  $z_0$  est l'unique solution double de l'équation caractéristique et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  vérifient  $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu)z_0^0 = \mu$  et  $u_1 = (\lambda + \mu)z_0 = (\lambda + u_0)z_0$ .

### Démonstration

La démonstration sera faite ultérieurement conformément au programme.

### Remarque

- On remarquera *la très grande ressemblance entre les propositions précédentes et celles concernant les équations différentielles linéaires* du chapitre 8, section IV. Cette ressemblance entre des objets à priori très éloignés sera expliquée dans les chapitres sur les espaces vectoriels et justifie l'usage répété du mot *linéaire* pour qualifier ces objets.
- *Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants*, la proposition 9.32 s'adapte :

### Proposition 9.33

Soient  $u_0, u_1, a, b$  des réels. On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  en résolvant l'équation caractéristique *dans*  $\mathbb{R}$  puis

- si  $\Delta > 0$ , on écrit  $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$  où  $z_1, z_2$  sont les deux solutions *réelles* distinctes de l'équation caractéristique et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  doivent être calculées de sorte à ce que  $u_0 = \lambda + \mu$  et  $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$  ;
- si  $\Delta = 0$ , on écrit  $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$  où  $z_0$  est l'unique solution *réelle* double de l'équation caractéristique et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  vérifient  $u_0 = \mu$  et  $u_1 = (\lambda + u_0)z_0$  ;
- si  $\Delta < 0$ , on écrit  $u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$  où  $re^{\pm i\theta}$  sont les deux solutions *complexes conjuguées* distinctes de l'équation caractéristique et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  vérifient  $u_0 = \lambda$  et  $u_1 = r [u_0 \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)]$ .

### Démonstration



### Méthode : Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires

- Pour une suite arithmético-géométrique vérifiant  $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$ , **on retient uniquement** qu'une formule explicite est obtenue comme *somme d'une suite géométrique de raison a et d'une solution particulière constante de la formule de récurrence*. Le premier terme de la suite géométrique peut être facilement obtenu par le calcul du premier terme de  $u$ .
- Pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$ , **on retient uniquement** la formule explicite suivant les valeurs du discriminant. Les valeurs de  $\lambda, \mu$  peuvent être facilement obtenues par le calcul des deux premiers termes de  $u$ .

On est aidé en cela par la ressemblance entre la méthode vue pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et celle énoncée dans la proposition 9.32 et la remarque suivante.

**Ex. 9.9 Suite de Fibonacci**

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  avec  $u_0 = u_1 = 1$ .

**Cor. 9.9**

**Ex. 9.10** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$  avec  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 3$ .

Comment aurait-on pu obtenir la formule explicite sans le recours à la méthode du cours ?

**Cor. 9.10**

**Ex. 9.11** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$  avec  $u_0 = u_1 = 1$  et montrer que cette suite est périodique.

**Cor. 9.11**

**Ex. 9.12 (Cor.)** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$  avec  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 3$ . Simplifier  $u_{100} + u_{101}$ . Ce résultat se généralise-t-il ?



**Important ! Ressemblance... oui mais !**

Les équations différentielles linéaires sont données sous la forme  $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$  tandis que les suites récurrentes linéaires vérifient

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0, b \neq 0$  ce qui explique la légère différence entre les équations caractéristiques associées (et leur discriminant).

En outre, si  $\Delta = 0$  par exemple, la solution générale de  $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$  s'écrit  $y = (\lambda x + \mu)e^{z_0 x}$  où  $z_0$  est l'unique solution double de l'équation caractéristique

tandis que la formule explicite obtenue pour  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$  est  $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$  où  $z_0$  est l'unique solution double de l'équation caractéristique.

### III.4. Démonstration par récurrence double



**Méthode : Démonstration par récurrence double**

Étant donné  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , pour démontrer qu'un prédictat  $P(n)$  est vrai pour tout entier  $n \geq n_0$ , on peut effectuer une **récurrence double** :

- **Initialisation** : on vérifie que  $P(n_0)$  et  $P(n_0 + 1)$  sont vrais.
- **Héritéité** : on suppose que pour un entier  $n \geq n_0$ , les propriétés  $P(n)$  et  $P(n + 1)$  sont vraies, **en énonçant clairement ces propriétés appelées hypothèses de récurrence**. On démontre alors, sous ces hypothèses, que  $P(n + 2)$  est vraie.
- **Conclusion** : « **La propriété est initialisée aux rangs  $n_0$  et  $n_0 + 1$  et héréditaire** »

*pour  $n \geq n_0$ , elle est donc vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ . »*

En résumé, on démontre :

$$\overbrace{P(n_0) \text{ et } P(n_0+1)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{(P(n) \text{ et } P(n+1))}_{\text{Hérité}} \Rightarrow P(n+2) \Rightarrow \dots$$

### Ex. 9.13 Suite de Fibonacci (bis)

Sans utiliser la formule explicite obtenue à l'exercice 9.9, montrer que la suite de Fibonacci définie par  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  avec  $u_0 = u_1 = 1$  vérifie :

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ .
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$ .

### Cor. 9.13

Ex. 9.14 Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}^*$ , on pose

$$\Pi_n(z) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad \text{et} \quad Z = z + \frac{1}{z}$$

Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \Pi_n(z) = P_n(Z)$$

Montrer que les racines de  $P_n$  sont réelles et appartiennent à  $[-2; 2]$ .

## IV. Limite d'une suite réelle

Dans cette section, les suites considérées sont des *des suites réelles*.

### IV.1. Limite finie



#### Définition 9.34

On appelle *intervalle non trivial* de  $\mathbb{R}$  tout intervalle non vide et non réduit à un point.



#### Définition 9.35

On dit qu'une suite réelle  $u$  *tend vers* le réel  $\alpha$  (ou *converge vers*  $\alpha$ ) si tout intervalle fermé non trivial centré sur  $\alpha$  contient *tous les termes de la suite à partir d'un certain rang*.  $\alpha$  est appelé *limite de la suite*  $u$ .

Une suite *qui converge vers un nombre réel* est dite *convergente*.

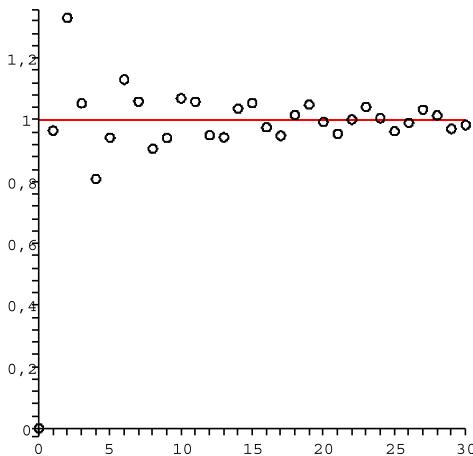
Sinon, elle est dite *divergente*.



#### Notation

Avec des quantificateurs cela s'écrit :  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leq \epsilon$ .

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$  ou  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ .



### Remarque

- $N$  dépend à priori de  $\epsilon$  et généralement, plus  $\epsilon$  est petit, plus  $N$  doit être choisi grand.
- Il découle immédiatement de la définition que  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .



### Méthode

Pour montrer qu'une suite  $u$  converge vers  $\alpha$  **à l'aide de cette définition** :

- 1) on se donne une valeur  $\epsilon > 0$   
 « **Soit**  $\epsilon > 0$ . »
- 2) on trouve un rang  $N$  adapté à  $\epsilon$   
 « **Montrons qu'il existe**  $N \in \mathbb{N}$  **tel que pour tout entier**  $n \geq N$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \epsilon$ . »

On peut aussi faire une démonstration par analyse/synthèse.

**Ex. 9.15** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Cor. 9.15**

### Proposition 9.36

Si  $u$  converge vers  $l > 0$ , alors il existe un rang  $N$  à partir duquel  $u_n > 0$ .

### Démonstration

## IV.2. Unicité de la limite d'une suite convergente

**Lemme 9.37**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a l'équivalence :

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon$$

**Démonstration****Proposition 9.38**

La limite d'une suite convergente est unique.

**Démonstration****IV.3. Limite infinie****Définition 9.39**

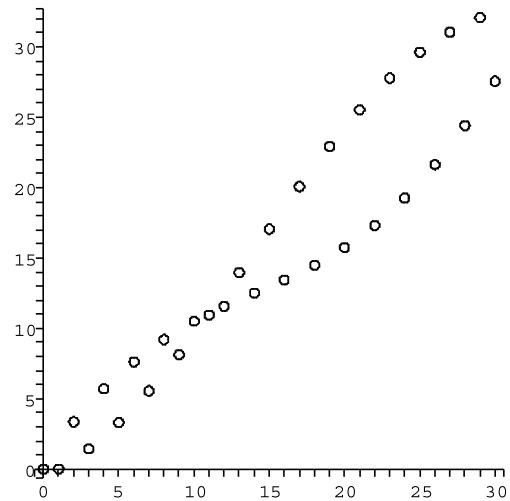
On dit qu'une suite réelle  $u$  **tend vers**  $+\infty$  (ou **diverge vers**  $+\infty$ ) si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**.

**Notation**

Avec des quantificateurs :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

$$\text{On note : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Définition 9.40**

De même, on dit que  $u$  **tend vers**  $-\infty$  (ou **diverge vers**  $-\infty$ ) et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ou  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  si

.....

**Remarque**

$N$  dépend à priori de  $A$  et plus  $|A|$  est grand, plus  $N$  doit être choisi grand.

**Méthode**

Pour montrer qu'une suite  $u$  diverge vers  $\pm\infty$  **à l'aide de cette définition** :

- 1) on se donne une valeur  $A \in \mathbb{R}$   
« **Soit**  $A \in \mathbb{R}$ . »
- 2) on trouve un rang  $N$  adapté à  $A$

« **Montrons qu'il existe**  $N \in \mathbb{N}$  **tel que quel que soit**  $n \geq N, u_n \geq A$  »

pour une suite divergeant vers  $+\infty$

ou

« **Montrons qu'il existe**  $N \in \mathbb{N}$  **tel que quel que soit**  $n \geq N, u_n \leq A$  »

pour une suite divergeant vers  $-\infty$ .

On peut aussi faire une démonstration par analyse synthèse.

**Ex. 9.16** Montrer que si  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ .

**Cor. 9.16**

### Proposition 9.41

La limite (finie ou infinie) d'une suite est unique.

## IV.4. Propriété

### Propriété 9.42

Si  $u$  est une suite convergente alors elle est bornée.

Si  $u$  diverge vers  $\pm\infty$  alors elle n'est pas bornée.

Les réciproques sont fausses en général.

### Démonstration

## IV.5. Opérations sur les limites finies

### Théorème 9.43

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$  alors

1) Combinaisons linéaires :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$ .

2) Produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l_1 l_2$ .

3) Quotient : si  $l_1 \neq 0$ , alors  $\frac{v_n}{u_n}$  est définie à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}.$$

### Démonstration

## IV.6. Passage à la limite dans une inégalité

**Théorème 9.44**

Si  $u$  et  $v$  sont deux suites réelles convergeant vers  $l_1$  et  $l_2$  et telles que à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$ , alors  $l_1 \leq l_2$ .

Si à partir d'un certain rang  $u_n < v_n$ , on ne peut rien affirmer de plus : on a toujours  $l_1 \leq l_2$ .

**Démonstration****V. Théorèmes d'existence d'une limite****V.1. Théorèmes des gendarmes****Théorème 9.45**

Si  $u$  et  $v$  sont deux suites réelles et  $l$  un réel tels que  $u$  converge vers 0 et à partir d'un certain rang  $|v_n - l| \leq u_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

**Théorème 9.46 (Théorème des gendarmes)**

Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont trois suites réelles telles que  $u$  et  $w$  convergent vers la même limite  $l$  et à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

**Théorème 9.47**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Démonstration****Corollaire 9.48**

La suite  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

- diverge vers  $+\infty$  si  $a > 1$  ;
- est constante égale à 1 si  $a = 1$  (donc converge vers 1) ;
- converge vers 0 si  $-1 < a < 1$  ;
- n'admet pas de limite si  $a \leq -1$ .

**Démonstration****V.2. Suites monotones****Théorème 9.49**

Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

**Théorème 9.50**

Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers  $-\infty$ .

**Théorème 9.51 (Théorème de convergence monotone)**

Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

Toute suite réelle décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

**Démonstration**

Ex. 9.17 On reprend la suite  $u$  : 
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$$
 définie dans un précédent exercice.

Nous avons montré que si  $u_0 \in [0; 1]$  alors  $u$  est décroissante.

Montrer de plus que, dans ce cas, elle est convergente.

Quelle est sa limite ?

**Cor. 9.17****V.3. Suites adjacentes****Définition 9.52**

On dit que deux suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes si 
$$\begin{cases} \text{l'une est une suite croissante} \\ \text{l'autre est une suite décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$$

**Théorème 9.53 (Théorème des suites adjacentes)**

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

**Démonstration**

Ex. 9.18 Soient  $u$  et  $v$  les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

**VI. Compléments****VI.1. Suites extraites**



### Définition 9.54

Étant donnée une suite  $u$ , on dit que  $v$  est une **suite extraite** de  $u$  s'il existe une injection croissante  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$ .

### Proposition 9.55

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

### Proposition 9.56

Si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $l$ , alors  $u$  converge aussi vers  $l$ .

Ex. 9.19 On donne  $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)$ . Expliciter les suites extraites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{6n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{6n+4})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Que peut-on en conclure pour la suite  $u$  ?

### Cor. 9.19

## VI.2. Suites complexes



### Définition 9.57

Étant donnée une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  complexe, on définit les suites  $\mathcal{R}e(z) = (\mathcal{R}e(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{I}m(z) = (\mathcal{I}m(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\bar{z} = (\bar{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $|z| = (|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .



### Définition 9.58

On dit que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{C}$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - l| = 0$ .

Sinon, on dit que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.



### Notation

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$ .



### Important !

Les limites infinies **ne sont pas définies pour les suites complexes**.

### Théorème 9.59

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}e(z_n) = \mathcal{R}e(l) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m(z_n) = \mathcal{I}m(l) \end{cases}$$

**Démonstration****Remarque**

Ce théorème permet d'étudier les suites complexes en se ramenant aux suites réelles. Il permet aussi de transférer certaines propriétés des suites réelles aux suites complexes : limite d'une somme, d'un produit, etc...

**Important !**

Tous les théorèmes concernant les suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre .....  
.....  
.....

**VI.3. Droite numérique achevée****Définition 9.60**

On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

**Notation**

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

**Remarque**

On peut prolonger les lois de  $(\mathbb{R}; +; \times)$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  par analogie avec les théorèmes opératoires sur les limites mais pas totalement à cause des cas d'indétermination.

Ainsi, soit  $l \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$l + \infty = \dots$$

$$+\infty + \infty = \dots$$

$$-\infty + \infty = \dots$$

De même, soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_-^*$ , on a :

$$a \times (+\infty) = \dots$$

$$b \times (+\infty) = \dots$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = \dots$$

$$(-\infty) \times (+\infty) = \dots$$

$$0 \times (+\infty) = \dots$$

$$l - \infty = \dots$$

$$-\infty - \infty = \dots$$

$$+\infty - \infty = \dots$$

$$a \times (-\infty) = \dots$$

$$b \times (-\infty) = \dots$$

$$(-\infty) \times (-\infty) = \dots$$

$$(+\infty) \times (-\infty) = \dots$$

$$0 \times (-\infty) = \dots$$

Ces tableaux peuvent être aussi vus comme des tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Ils sont complétés pour  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  par  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$ .

On retiendra enfin que les limites de la forme  $1^{\pm\infty}$ ,  $\pm\infty^0$  et  $0^0$  ..... .

## VI.4. Exercice de synthèse

**Ex. 9.20** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ .

- 1) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- 2) Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$ .
- 3) Calculer  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ .
- 4) Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$ .
- 5) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante positive.
- 6) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ .
- 7) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a_n}$  et en déduire une approximation rationnelle de  $e$  à  $10^{-3}$  près.

## VII. Correction des exercices

**Cor. 9.3 :**

- 1) En deux temps :
  - Soit  $y \in B$ .  $\forall x \in A, x \leq y$  donc  $y$  est un majorant de  $A$  et  $\sup A \leq y$ .  
Nous venons de démontrer que  $\forall y \in B, \sup A \leq y$ .
  - Ainsi,  $B$  est minoré par  $\sup A$  et  $\inf B \geq \sup A$ .
- 2) Supposons que  $\sup A = \inf B$  et soit  $\epsilon > 0$ .  
Soit  $u = \sup A - \frac{\epsilon}{2}$  et  $v = \inf B + \frac{\epsilon}{2}$ . D'après le lemme 9.10, il existe  $x \in A$  tel que  $u < x < \sup A$  c'est-à-dire  $-\sup A < -x < -u$ , et  $y \in B$  tel que  $\inf B < y < v$ .  
En faisant la somme des deux inégalités, on obtient l'existence de  $(x; y) \in A \times B$  tels que  $0 < y - x < v - u = \epsilon$ .  
Réciproquement, supposons que  $\forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$ . Soit  $\epsilon > 0$  et  $x \in A, y \in B$  tels que  $y - x < \epsilon$ .  
On a donc  $\inf B \leq y < x + \epsilon \leq \sup A + \epsilon$ . Autrement écrit et en utilisant le premier résultat démontré, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\sup A \leq \inf B < \sup A + \epsilon$ .  
Ce qui permet de conclure que  $\sup A = \inf B$  (si l'on n'est pas convaincu par la précédente propriété, on fait une démonstration par l'absurde).

**Cor. 9.12 :** Équation caractéristique :  $z^2 + z - 2 = 0$  de discriminant  $\Delta = 1 + 8 = 9$  donc  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu (-2)^n$ .

Or  $u_0 = 0 = \lambda + \mu$  et

$$u_1 = 3 = \lambda - 2\mu$$

donc  $\lambda = 1$  et  $\mu = -1$  d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$$

On a donc  $u_{100} + u_{101} = 1 - (-2)^{100} + 1 - (-2)^{101} = 2 - (2^{100} - 2^{101}) = 2(1 + 2^{99}) = 2u_{99}$ .

Ce résultat se généralise évidemment puisqu'il s'agit en fait de la formule de récurrence donnée pour  $u$  !