Maths - Feuille d'exos n° 9

Nombres réels et suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

Ex. 9.1 Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.
$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$C = \left\{\frac{x^2-3x+6}{x-2}, x \in [3;7]\right\}$ $D = \mathbb{Q} \cap [0;\pi]$
$(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$:
$E = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $F = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$G = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Ex. 9.2 (Cor.) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, x \leq \alpha$.
Montrer que $\sup A \leq \alpha$.
Que peut-on dire si $\forall x \in A, x < \alpha$?

Ex. 9.3 (Cor.) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que E_n admet une borne inférieure ***réelle*** et que $\inf E_n = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \left(k + \dfrac{n}{k}\right)$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
  Dans quel(s) cas a-t-on $\inf E_n = \sqrt{4n}$?

Ex. 9.4 [**] On note $\mathcal{A} = \left\{p + q\sqrt{2}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\} \subset \mathbb{R}$, et $\mathcal{A}_+^* = \{x \in \mathcal{A}, x > 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_+^*$ possède une borne inférieure ***réelle***.
2. Calculer $\inf \mathcal{A}_+^*$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   Indication : on pourra tenter d'adapter les deux premières questions à l'ensemble $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathcal{A}, x > a\}$ où a est un réel quelconque.

Ex. 9.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
En déduire la valeur de $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$.

II. Introduction aux suites

Ex. 9.6 Étudier la monotonie des suites définies par :
$u_n = \frac{1}{1+n^2}$ $v_n = \frac{n!}{2^n}$ $w_n = \frac{n^3}{5^n}$ $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+(-1)^n}}$

Ex. 9.7 Un particulier emprunte une somme M à sa banque pour un achat immobilier.
Un mois après son emprunt, il paye sa première mensualité m. Mais il y a des intérêts sur la somme qu'il a empruntée, de sorte que le montant restant à rembourser après sa première mensualité est de

$$S_1 = M \times (1+t) - m$$

où t est le taux d'intérêt ***mensuel*** de son emprunt.
Le même raisonnement vaut pour les mois suivants, ce qui a pour conséquence que la suite des montants restant à rembourser est une suite arithmético-géométrique donnée par

$$S_0 = M \quad \textbf{et} \quad \forall n \in [\![0; N-1]\!], S_{n+1} = S_n \times (1+t) - m$$

où N est le nombre de mois que dure l'emprunt.

1. Quel est le montant minimal m_0 de la mensualité garantissant que la suite S des sommes restant à rembourser est décroissante ?
2. On suppose que $m > m_0$. Combien de mois va durer l'emprunt ?

3. ***Application numérique*** : on suppose que $M = 100000€$, $t = 0,3\% = \dfrac{3}{1000}$ et $m = 2m_0$.
   Calculer m_0 puis le nombre de mois N sur lequel s'étale le remboursement.
   Enfin, calculer la dernière mensualité versée par l'emprunteur (attention ! la dernière mensualité est d'un montant généralement différent des précédentes).

Ex. 9.8

1. Montrer que pour tous réels x et y, on a :
   $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.
2. Montrer que pour tout réel x on a : $\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.
3. Soit u la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} & = & n-u_n \end{array}\right.$.
   Calculer u_n en fonction de n (on demande une formule explicite).

Ex. 9.9 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?
2. Étudier alors sa monotonie.
3. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 9.10 Soit u la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{array}\right.$.

Étudier la suite u, préciser notamment sa limite si elle existe.

Ex. 9.11 Soient a, b deux constantes réelles, u une suite réelle vérifiant $u_{n+2}+u_{n+1}+u_n = 0$ et v une suite réelle vérifiant $v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n = 0$.

1. Montrer sans calculer son terme général que u est périodique de période 3.
2. Calculer le terme général u_n en fonction de n et retrouver le résultat précédent.
3. On suppose que la suite v est **non nulle** et périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe un nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant à la fois l'équation caractéristique (E_c) : $Z^2 + aZ + b = 0$ et l'équation $Z^p - 1 = 0$.
   Indication : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de (E_c).
4. Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.
   Indication : en posant $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que
   $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)\left(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1\right)$.

Ex. 9.12 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$

Ex. 9.13 Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour les deux suites ci-dessous, on demande de montrer l'existence puis de ***donner une formule explicite*** pour le n-ième terme de la suite :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n^2}$;
2. $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{1}{\frac{a}{v_n} + \frac{b}{v_{n+1}}}$.

III. Limite d'une suite réelle

Ex. 9.14 (Cor.)

1. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} = +\infty$.

Ex. 9.15 Étudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n+2\sin\left(n^2\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+(-1)^n n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Ex. 9.16 Montrer que la suite u définie par $u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{1}{4}$, $u_0\in\mathbb{R}$ est croissante quelle que soit la valeur de $u_0\in\mathbb{R}$.
Faire une représentation graphique de la suite récurrente.
Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 la suite est-elle majorée ?
Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis donner sa valeur.

Ex. 9.17 Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+...+\lfloor nx\rfloor}{n^2}$.

Ex. 9.18 Montrer en utilisant des suites extraites que $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Faire de même pour $\left(\cos\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour $\left(\sqrt{n}-\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 9.19 On considère les suites définies pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.
Montrer que u et v convergent vers une même limite.
En déduire un encadrement d'amplitude $\dfrac{1}{3}$ de la limite commune aux deux suites.

Ex. 9.20 Soit u définie par $u_1=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{n}e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n>0$.
2. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex. 9.21 [$*$] Soit u définie par $u_0\in]0;1[$ et $u_{n+1}=1+\dfrac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que la suite u est bornée, convergente et calculer sa limite.
2. Les résultats de la questions précédentes restent-ils valables si l'on choisit u_0 réel quelconque ?

Ex. 9.22 Soit $z_0\in\mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_{n+1}=\dfrac{z_n+|z_n|}{2}$.

1. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Étudier cette suite dans les cas où $z_0=0$, $z_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $z_0\in\mathbb{R}_-^*$.
3. Montrer que $z_0\notin\mathbb{R}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}, z_n\notin\mathbb{R}$.
4. On suppose que $z_0\notin\mathbb{R}$. Étudier la convergence de (z_n).
[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

IV. Révisions

Ex. 9.23 Donner une formule explicite pour $y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ ou $u:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ en envisageant successivement les deux cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:

1. $y'=y-1$ et $u_{n+1}=u_n-1$
2. $y''=-y'+y$ et $u_{n+2}=-u_{n+1}+u_n$.

Ex. 9.24 Soit $n\in\mathbb{N}$.
Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{j}$ et $T_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(-1)^j\binom{k}{j}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n\\ j\ \mathtt{pair}}}\binom{k}{j}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n\\ j\ \mathtt{impair}}}\binom{k}{j}$.

Ex. 9.25 [$*$]***Mines Telecom MP 2018***

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on définit $u_n=\displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite ? Peut-on calculer cette limite ?

Ex. 9.26 [$*$] En remarquant que $\forall x \in [0;1], x^2 \leqslant x$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n}{4}$$

Corrections

Cor. 9.2 : Par définition, α est un majorant de A. Donc A, non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à α. Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on a encore $\sup A \leq \alpha$. Le même raisonnement que précédemment reste valable.
Attention cependant, il est possible que $\sup A = \alpha$. L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, on a $\forall x \in A, x < 1$, mais $\sup A = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Cor. 9.3 :

- E_n est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si $k \geq n+1$, alors $k + \frac{n}{k} > k \geq n+1$. Or pour $k = n$, on a $k + \frac{n}{k} = n+1$. Donc la borne inférieure est atteinte pour $k \leq n$, c'est-à-dire : $\inf E_n = \inf\limits_{1\leq k\leq n}\left(k + \dfrac{n}{k}\right)$.
- Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{n}{x}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$.
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc f passe par un minimum en $x = \sqrt{n}$, valeur pour laquelle $f(x) = f\left(\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n}$.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.

  Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où $\inf E_n = \inf\limits_{1\leq k\leq n}\left(k + \dfrac{n}{k}\right)$ est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction f soit atteint c'est-à-dire que n soit un carré.

Cor. 9.14 :

1. Lemme : $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
   En effet, en définissant la fonction $f : x \in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :
   $\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.
   Donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut $f(0) = \ln(1) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.
   Or $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p}$ (qui appartient bien à $]-1;+\infty[$).
   De même $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(\frac{p+1-1}{p+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{-1}{p+1}\right)$.
   Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) \geqslant -\dfrac{-1}{p+1}$ (car $\dfrac{-1}{p+1} \in]-1;+\infty[$).
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
   Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
   En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
3. D'après la première question, $\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p} \geqslant \sum\limits_{p=1}^{n}\ln(p+1) - \ln(p) = \ln(n+1)$ (télescopage).
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p} = +\infty$.