Intégrales, équations différentielles

Exercice 1.

On considère les deux équations différentielles suivantes, dont on cherche les solutions de classe $\mathcal{C}^3$ ***à valeurs réelles*** :

$$(E) : y''' = y$$

$$(F) : y'' + y' + y = 3e^x$$

1) Soit y une solution de (F).
   Montrer qu'elle est aussi solution de (E).
2) Soit y une solution de (E).
   Montrer que $y'' + y' + y$ est proportionnelle à la fonction exp.
3) On note $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de (F).
   Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathcal{S}_1 = \{u + \lambda \exp, u \in \mathcal{S}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4) Résoudre (F) et donner $\mathcal{S}_2$.
5) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E).

Exercice 2.

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression des intégrales de Wallis $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t}$ puis de l'utiliser pour obtenir la limite d'une intégrale.

- Partie A - Préliminaire

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$.

- Partie B - Expression de W_n

1) Calculer $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t$.
2) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Pour les deux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la partie préliminaire.
4) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
5) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
(indication : on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n...)

- Partie C - Équivalent de W_n

1) Montrer que $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin^2 t \leq \sin t \leq 1$.

2) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

4) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

5) En déduire un équivalent de W_n.

- Partie D - Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.

1) Justifier l'existence de la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.

2) Montrer que F est croissante et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq 0$.

3) Montrer que $\forall t \in [0; 1], 1 - t \leq e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

4) En posant $u = \sqrt{nt}$ (avec $n \in \mathbb{N}$), en déduire que
$\forall u \in \left[0; \sqrt{n}\right], \left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \dfrac{u^2}{n}\right)^{-n}$.

5) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \mathrm{d}t$.

7) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \sin v$, montrer que
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \sqrt{n} W_{2n+1}$.

8) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \tan v$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

9) En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$