Maths - DM n°4 - Pour le lundi 5 janvier,

Intégrales

On se propose d'étudier les intégrales définies pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ par

$$A_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos^p(t)\mathrm{d}t$$

Partie A - Une intégrale farouche

Dans cette partie, on étudie pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = A_{n,n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos^n(t)\mathrm{d}t$

et pour $n \geqslant 2$ entier, $b_n = A_{n,n-2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t$.

1) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2) En tentant de calculer a_n grâce à deux intégrations par partie successives... obtenir une formule explicite pour b_n !
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n+1}}{2}$.
4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)}$.
5) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k}}{2^{k+1}(n-k)}$.
   a) Que vaut $f_n(0)$? Que vaut $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$? Que vaut $f_n(1)$?
   b) Montrer que f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que pour $x \neq \dfrac{1}{2}$, $f_n'(x) = \dfrac{2^n x^n - 1}{2^n\,(2x-1)}$.
   d) En effectuant le changement de variable $u = 2t - 1$, montrer que
   $$\frac{1}{2^n}\int^x \frac{2^n t^n - 1}{2t-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2x-1)^k}{k}$$
   e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)} = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$
   f) Montrer de même que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\binom{n}{k}}{k}$.

Partie B - Étude générale

1) Calculer pour tout p entier et tout entier n les valeurs de $A_{n,0}, A_{n,1}, A_{0,p}$ et $A_{1,p}$.

2) Montrer que pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, $(n-p-2)(n+p+2)A_{n,p+2} = n-(p+2)(p+1)A_{n,p}$.

3) Montrer que pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, $A_{n+1,p+1} = \dfrac{A_{n+2,p} + A_{n,p}}{2}$.

4) Montrer que $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2, A_{n,p} \in \mathbb{Q}$.

5) Remplir le tableau suivant donnant les valeurs de $A_{n,p}$ pour $(n;p) \in [\![0;6]\!]^2$:

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

6) Écrire une fonction Python `Approx(n,p)` prenant en paramètre les valeurs de n et de p (entières positives) et renvoyant une approximation flottante de l'intégrale $A_{n,p}$.

7) Écrire une fonction Python `A(n,p)` prenant en paramètre les valeurs de n et de p (entières positives) et renvoyant deux entiers q et r tels que $A_{n,p} = \dfrac{q}{r}$.