Exercice corrigé

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

December 17, 2025

Correction de l'exercice 14 de la feuille d'exo 8

Ex. 14 (Cor.) [$**$] Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$(E) : f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser $g(t) = f\left(e^t\right)$.

Cor. 14 : On cherche à résoudre cette équation fonctionnelle sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est donc licite de poser $x = e^t$ et $y(t) = f\left(e^t\right)$.

f étant à priori dérivable, y est elle aussi dérivable par composition et

$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = e^t f'\left(e^t\right)$

En injectant dans (E), on obtient donc $e^{-t}y' = y(-t)$ ou encore $(E_2) : \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - e^t y(-t) = 0$

Posons $z(t) = y(-t)$. On a donc d'après (E_2)

$y' - e^t z = 0$ d'une part, et

$z' = -y'(-t) = -e^{-t}y$ d'autre part.

Remarquons que, puisque $y' = e^t z$ et que $z' = -e^{-t}y$, que par ailleurs y et z sont dérivables, y' et z' sont dérivables, c'est-à-dire y et z sont deux fois dérivables !

Donc, en dérivant la première équation, $y'' - e^t z - e^t z' = 0$ c'est-à-dire en utilisant (E_2) et la ligne précédente

$$y'' - y' + y = 0$$

Si y est solution de (E_2), alors y s'écrit donc $y = e^{\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$, mais ce n'est à priori pas une équivalence logique car la dérivation n'est pas injective.

Vérifions donc que ces fonctions sont bien solutions de (E_2).

$y' = y/2 + e^{\frac{t}{2}}\left(-A\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

et $e^t y(-t) = e^{\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$.

Pour que ces fonctions soient solutions de (E_2), il faut et il suffit donc que $A = B\sqrt{3}$.

Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions

$$y = \lambda e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

et les solutions de (E) sont

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$