Maths - Chapitre 10

Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

I.1. Introduction

Essentiellement, les matrices sont des tableaux rectangulaires de nombres. En cela, elles se rapprochent des ***tableaux*** `numpy` vus en informatique.
A titre d'exemple, voici deux matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \pi \\ \sqrt{2} & -5 & e \end{pmatrix}$$

Elles ont de très nombreuses applications : comme un outil de calcul et de présentation pour la résolution des systèmes linéaires par exemple, mais aussi, de façon plus étonnante, en physique et en Sciences de l'ingénieur (on utilise par exemple, en mécanique, la ***matrice d'inertie*** d'un solide, ou encore la ***matrice des contraintes*** d'un élément de volume). On peut aussi citer les matrices de convolution en informatique/intelligence artificielle.
Le présent chapitre vise à introduire ***les propriétés calculatoires*** des matrices :

- non seulement pour introduire des ***opérations sur les matrices*** permettant une écriture symbolique très compacte et efficace des opérations sur les lignes des systèmes linéaires ;
- mais encore pour étudier les ***propriétés des opérations matricielles*** qui ***se distinguent en bien des points des propriétés habituelles des opérations sur les scalaires***.

Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps, pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et n, p, q des entiers naturels non nuls.
Commençons par donner la définition d'une matrice :

Définition 10.1 (Matrice)

On appelle ***matrice*** A de ***type*** (n, p) ou ***d'ordre*** (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n ***lignes et*** p ***colonnes*** d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Les a_{ij} sont appelés ***coefficients*** de la matrice.
Lorsque $p = 1$, la matrice est appelée ***matrice-colonne*** ou encore ***vecteur-colonne***.
Lorsque $n = 1$, la matrice est appelée ***matrice-ligne*** ou encore ***vecteur-ligne***.

Comme l'indique la définition précédente, une matrice se caractérise par ***son nombre de lignes*** n, ***son nombre de colonnes*** p et par la valeur de ses coefficients.
Cette remarque conduit à définir divers ensembles de matrices, regroupant toutes les matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes :

Notation

L'ensemble des matrices de coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Dans le cas où $n = p$, on note plus simplement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet ensemble sont appelées ***matrices carrées***.
L'ensemble des vecteurs-colonne est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^n$.
L'ensemble des vecteurs-ligne est noté $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^p$.

I.2. Combinaisons linéaires de matrices de même ordre

Définition 10.2 (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice λA par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Définition 10.3 (Addition de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $A + B$ par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Définition 10.4 (Combinaison linéaire de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toute matrice de la forme $\lambda A + \mu B$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ est appelée ***combinaison linéaire des matrices*** A ***et*** B.

On définit de même l'addition ou la combinaison linéaire de N matrices de même ordre, où N est un entier supérieur ou égal à 2.

I.3. Matrices élémentaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et tout $j \in [\![1; p]\!]$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient e_{ij} qui est égal à 1. Autrement dit

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

I.4. Produits de matrices

Ex. 10.1 Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2+3i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3+i & 7+6i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Définition 10.5

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A \times B = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant q}} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Autrement dit, pour obtenir le coefficient c_{ij} de AB, on effectue les « produits scalaires » du i-ème vecteur ligne de A par le j-ème vecteur colonne de B.

Remarque

Pour que le produit de deux matrices soit possible, il faut et il suffit que ***le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite***.
Le produit possède alors ***le même nombre de lignes que la matrice de gauche et le même nombre de colonnes que la matrice de droite***.
D'autre part, ***les produits*** AB ***et*** BA ne sont tous les deux possibles que si ***les matrices***

A ***et*** B ***sont d'ordre*** (n,p) ***et*** (p,n).
Cette impossibilité, en général, d'échanger les matrices A ***et*** B est une première preuve que ***le produit de matrices n'est pas commutatif***. En voici une autre :

Ex. 10.2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

I.5. Matrice nulle

Définition 10.6

On appelle matrice ***nulle*** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Notation

On note $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.6. Matrices carrées particulières

a) Matrices commutantes

Il peut arriver que ***pour deux matrices carrées de même ordre*** A ***et*** B ***on ait*** $AB = BA$.

$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{pmatrix}, AB =$ $\qquad$ $, BA =$

Définition 10.7

Pour deux matrices carrées A et B de même ordre n, on dit que A et B ***commutent*** si $AB = BA$.

b) Diagonale d'une matrice

Définition 10.8

On appelle ***diagonale*** d'une matrice carrée les coefficients a_{ii}, $i \in [\![1; n]\!]$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la diagonale sont appelés ***coefficients diagonaux***.

Définition 10.9

On appelle ***matrice diagonale*** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice dont ***tous les coefficients sont nuls*** à l'exception éventuellement des coefficients diagonaux.

Définition 10.10

On appelle matrice ***identité*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, la matrice diagonale dont ***tous les coefficients diagonaux valent 1***.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrices triangulaires

Définition 10.11

On appelle ***matrice triangulaire supérieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sous-diagonaux sont nuls*** : $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Définition 10.12

On appelle ***matrice triangulaire inférieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sur-diagonaux sont nuls*** : $\forall j > i, a_{ij} = 0$.

$$T_S = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad T_I = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Définition 10.13

On appelle matrice triangulaire toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

d) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 10.14

On appelle ***matrice symétrique*** toute matrice A pour laquelle $\forall i, j \in [\![1; n]\!], a_{ij} = a_{ji}$.

Définition 10.15

On appelle ***matrice antisymétrique*** toute matrice carrée A pour laquelle
$\forall i, j \in [\![1; n]\!], a_{ij} = -a_{ji}$.
En particulier, pour $i = j$, on a :...

$$S = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Notation

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ***symétriques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ***antisymétriques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.7. Propriétés du produit matriciel

Propriété 10.16

L'addition de matrices est commutative, associative, possède un élément neutre qui est la matrice nulle. Par ailleurs toute matrice possède une matrice opposée.
Concernant la multiplication matricielle et la multiplication par un scalaire : soient n, p, q et r quatre entiers naturels non nuls.

Associativité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Élément neutre :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 1_{\mathbb{K}}.A = A$.
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$.

Distributivité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A(B + C) = AB + AC$.
$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A + B)C = AC + BC$.

Démonstration

Remarque

La distributivité de la multiplication matricielle autorise à factoriser ***à droite*** ou ***à gauche***.

Définition 10.17

On définit la puissance k-ième d'une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par
$A^k = \underbrace{A \times ... \times A}_{k \text{ facteurs}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.

La définition précédente n'est rendue possible que parce que le produit matriciel est associatif.

Propriété 10.18

Toute combinaison linéaire de matrices diagonales est une matrice diagonale.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

Propriété 10.19

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

I.8. Des règles qui ne sont pas valables pour les produits de matrices

L'exercice 10.2 montre que ***la multiplication de deux matrices carrées de même ordre n'est pas commutative*** !

Un produit de deux matrices non nulles peut être nul !
Autrement dit, si $AB = 0$... on ne peut rien conclure !
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

Une matrice carrée non nulle peut avoir une puissance k-ième nulle !
Autrement dit, si $A^k = 0$... On ne peut rien conclure !
$A = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}$, $A^2 =$

Les produits d'une même matrice par deux matrices distinctes peuvent être égaux !
Autrement dit, si $AB = AC$... on ne peut rien conclure en général !
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB =$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AC =$
ou encore, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $AD =$

Les identités remarquables ne sont plus valables en général !
En effet, en développant $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$ ....
on montre que $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow$ ....

I.9. Identités remarquables pour *les matrices carrées qui commutent*

Proposition 10.20

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ***qui commutent***, alors $\forall p \in \mathbb{N}$:

1) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}B^k$
2) $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^{p-k}B^k\right)$

Démonstration

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

II.1. Matrices et systèmes linéaires

Proposition 10.21

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration

Un système linéaire peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = (a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$, $B = (b_i)_{i \leqslant n}$ et $X = (x_j)_{j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ est le p-uplet inconnu.
Réciproquement, on peut présenter la résolution d'un système linéaire sous forme matricielle.

Ex. 10.3

1) Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ et de paramètre $s \in \mathbb{R}$:
   $(S)\left\{\begin{array}{rcrcl} (s+2)x & + & 3y & = & 2s+1 \\ 2sx & + & (s+1)y & = & 3s-1 \end{array}\right.$
2) Trouver un système paramétré par s qui possède un unique couple solution pour $s \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$, une infinité de solutions pour $s = 1$ et aucune solution pour $s = 2$ puis le résoudre.

Cor. 10.3

II.2. Systèmes compatibles/incompatibles

Définition 10.22 (Système compatible)

Étant donné un système $\mathcal{S}$ s'écrivant $AX = B$ sous forme matricielle avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur inconnu, on dit que

- $\mathcal{S}$ est ***compatible s'il existe une combinaison linéaire des colonnes de*** A ***égale à*** B ;
- $\mathcal{S}$ est ***incompatible sinon***.

Proposition 10.23

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est :

- ***vide*** si et seulement si le système est ***incompatible*** ;
- ***non vide*** si et seulement si le système est ***compatible***.
  De plus, dans ce dernier cas, les solutions du système sont les vecteurs de la forme $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière du système et Y une solution quelconque du ***système*** $AY = 0_{p,1}$ ***homogène associé à*** $\mathcal{S}$.

Démonstration

II.3. Matrices d'opérations élémentaires

Définition 10.24 (Matrice de transvection)

On appelle ***matrice de transvection de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $V_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ appartiennent à $[\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$V_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Définition 10.25 (Matrice de transposition)

On appelle ***matrice de transposition de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ où $i \neq j$ appartiennent à $[\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de transposition est une matrice de la forme

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Définition 10.26 (Matrice de dilatation)

On appelle ***matrice de dilatation de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme
$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de dilatation est une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Définition 10.27 (Matrice d'opération élémentaire)

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une ***matrice d'opération élémentaire*** si c'est une matrice de transvection, de transposition ou de dilatation.

Remarque

Les notations $V_{ij}(\lambda)$, T_{ij} et $D_i(\lambda)$ pour les matrices d'opérations élémentaires ***ne sont pas des notations officielles***. Elles ne sont introduites que dans le but de faciliter l'usage des matrices d'opérations élémentaires dans la suite de ce chapitre.
En revanche elles ne peuvent pas être utilisées en dehors de ce chapitre (en colle, en devoir, aux concours...) à moins d'en redonner la définition.

Ex. 10.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Calculer $AV_{1,2}(2)$, $V_{1,2}(2)A$, $AT_{2,3}$, $T_{2,3}A$, $AD_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $D_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

Cor. 10.4

II.4. Interprétation des produits par les matrices d'opérations élémentaires

Propriété 10.28

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Multiplier A ***à gauche*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la*** i***-ème ligne de*** A ***le produit de*** j***-ème ligne de*** A ***par*** λ.
Multiplier A ***à gauche*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les*** i***-ème et*** j***-ème lignes de*** A.

Multiplier A ***à gauche*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la i-ème ligne de A par λ***.
Multiplier A ***à droite*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la j-ème colonne de A le produit de i-ème colonne de A par λ***.
Multiplier A ***à droite*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les i-ème et j-ème colonnes de A***.
Multiplier A ***à droite*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la i-ème colonne de A par λ***.

Démonstration

Définition 10.29 (Matrices équivalentes par ligne)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par ligne*** si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à gauche*** de matrices élémentaires.

Définition 10.30 (Matrices équivalentes par colonne)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par colonne*** si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à droite*** de matrices élémentaires.

Notation

Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par ligne, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.
Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par colonne, on note $A \underset{C}{\sim} A'$.

III. Matrices carrées inversibles

III.1. Définition

Proposition 10.31

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $BA = AC = I_n$, alors $B = C$.

Démonstration

Définition 10.32 (Matrice carrée inversible)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ***inversible*** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On dit alors que B est ***l'inverse*** de la matrice A.

Notation

Si A est une matrice inversible, on note A^{-1} son inverse.

Ex. 10.5 Montrer qu'il existe des matrices carrées non nulles non inversibles.

Cor. 10.5

Proposition 10.33

Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. De plus :

- ***Matrices de transvection*** : $V_{ij}(\lambda)^{-1} = V_{ij}(-\lambda)$;
- ***Matrices de transposition*** : $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$;
- ***Matrices de dilatation*** : $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.

Démonstration

C'est une conséquence directe de la propriété 10.28.

III.2. Groupe linéaire

Définition 10.34

On appelle ***groupe linéaire d'ordre*** n et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 10.35

1) $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

2) si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration

III.3. Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Le théorème précédent conduit à la méthode suivante :

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|I_n)$.

À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1})$.

Ex. 10.6 Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix},\ C_t = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

III.4. Seconde méthode pour l'obtention de l'inverse d'une matrice

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|X)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1}X)$.

Ex. 10.7 (Cor.) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode précédente.

IV. Transposée d'une matrice et compléments

IV.1. Transposée

Définition 10.36

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelle ***transposée de*** A la matrice B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], b_{i,j} = a_{j,i}$.

Notation

On note A^{T} la transposée de la matrice A.

Définition 10.37

L'application trans : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$ est appelée ***transposition***.

IV.2. Matrices symétriques et antisymétriques

Proposition 10.38

La définition des matrices symétriques et antisymétriques se traduit à l'aide de la transposition par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = A$;
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

IV.3. Transposée des matrices d'opérations élémentaires

Proposition 10.39

La transposée des matrices d'opérations élémentaires vérifie :

- pour $i \neq j \in [\![1;n]\!]$, $V_{ij}(\lambda)^{\mathrm{T}} = V_{ji}(\lambda)$;
- $T_{ij}^{\mathrm{T}} = T_{ji} = T_{ij}$ car les matrices de transposition sont symétriques ;
- pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda)^{\mathrm{T}} = D_i(\lambda)$.

IV.4. Propriétés

Propriété 10.40

La transposition vérifie :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;
- si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), (A^{-1})^{\mathrm{T}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

Démonstration

V. Correction des exercices

Cor. 10.7 : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$
\begin{array}{rcll}
(A|X) & = & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 2 & -3 & 2 & c \end{pmatrix} & \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & a-3b \\ 0 & 13 & -4 & 2a-3c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & a-3b \\ 0 & 0 & 45 & -3a+39b-15c \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 5L_3 - 13L_2 \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 45 & 30 & 0 & 16a-13b+5c \\ 0 & 15 & 0 & 2a+4b-5c \\ 0 & 0 & 15 & -a+13b-5c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 15L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 & 12a-21b+15c \\ 0 & 15 & 0 & 2a+4b-5c \\ 0 & 0 & 15 & -a+13b-5c \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4a-7b+5c}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a+4b-5c}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+13b-5c}{15} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{45}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{15}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{15}L_3 \end{array}
\end{array}
$$

Ce dernier résultat prouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-7}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix}$$