Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

Ex. 10.1 Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} 5x+2y-z \\ x+z \\ x-y+3z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
Trouver une matrice A telle que $Y = AX$.

Ex. 10.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne donné. Quelles peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $AX = C$?
2. Montrer que l'équation $AX = C$ de la question précédente possède des solutions si et seulement si les coefficients de C sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
3. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 10.3 Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On note L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de A.

1. Quelles peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $XB = L_1$?
2. Trouver toutes les solutions de $XB = L_1$.
3. Faire de même pour $XB = L_2$ et $XB = L_3$.
4. Résoudre l'équation $MB = A$ d'inconnue M.

Ex. 10.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis en déduire A^n par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
La formule obtenue reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Ex. 10.5 Soit $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Notamment $j^3 = 1$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & j & j^2 \\ j^2 & 0 & j \\ j & j^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On pose par ailleurs $C = A + I_3$ et $D = B - 2I_2$.

1. Calculer D^2 et en déduire D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette expression reste-t-elle valable pour $n = 0$? pour $n = -1$? pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. Recommencer la première question pour C^n, $n \in \mathbb{N}^*$ puis la seconde question pour A^n.

Ex. 10.6 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 10.7 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x & 0 & \frac{1}{x} \\ x^2 & x & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer M^2 et montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M.
En déduire M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

Ex. 10.8 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $M^2 = (a+d)M + (bc - ad)I_2$.
2. Montrer que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On donnera notamment une expression de M^{-1} lorsque M est inversible.
3. On suppose que $M^2 = 0_2$. Montrer que M n'est pas inversible.
4. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 = 0_2$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
5. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Ex. 10.9 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On définit de plus les matrices $P = AB$ et $Q = BA$.

1. Calculer les matrices P et Q.
2. En effectuant le minimum de calculs, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $Q^n = 0_3$.
3. Étant donné une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $R = CA$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$R^n = \alpha^{n-1} R$$
où α est un réel dont on donnera une expression.
4. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne soit ni la matrice nulle, ni la matrice identité et telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$M^n = M$$

Ex. 10.10 (Cor.) Discuter suivant les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{K}$ l'inversibilité des matrices suivantes et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{pmatrix}$$
Généralisation aux dimensions $n > 3$?

Ex. 10.11 Discuter suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{K}$ l'inversibilité de $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

III. Divers

Ex. 10.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Ex. 10.13 On considère les deux suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $A = 5I_2 + J$ où $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Ex. 10.14 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ puis pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 10.15

1. Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} sont des matrices carrées symétriques.

2. Avec les mêmes notations que dans la question précédentes, on suppose de plus que $n < p$.
   $A^{\mathrm{T}}A$ peut-elle être inversible ?

3. Application numérique : calculer $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. L'une de ces deux matrices est-elle inversible ?

Ex. 10.16 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ***antisymétrique*** et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne.

1. À quel espace de matrices appartient le produit $X^{\mathrm{T}}AX$?

2. Montrer que $X^{\mathrm{T}}AX = 0$.

Corrections

Cor. 10.10 : En supposant $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 1 & b & b^2 & y \\ 1 & c & c^2 & z \end{pmatrix}
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & y-x \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & z-x \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 1 & a+c & \frac{z-x}{c-a} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & c-b & \frac{z-x}{c-a} - \frac{y-x}{b-a} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(b-a)(z-x)-(y-x)(c-a)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \frac{x(c-a)(b-a)(c-b)-a^2\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(y-x)(c-a)(c-b)-(a+b)\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{bc(c-b)x+ac(a-c)y+ab(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(c+b)(c-b)x+(a+c)(a-c)y+(a+b)(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{bc}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{ac}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{b+c}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{a+c}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{1}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

La comparaison entre la matrice A^{-1} et la matrice B permet par ailleurs d'inférer, sans calcul, que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} & \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{b}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} \\ \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} \end{pmatrix}$$