Correction DM n°3

Exercice 1.

1) Soit y une solution de $(F) : y'' + y' + y = 3e^x$.
   y est donc deux fois dérivable d'une part, et $y'' = e^x - y' - y$ est somme de fonctions au moins une fois dérivables.
   Donc y'' est dérivable, donc y est trois fois dérivable.
   Par ailleurs, en dérivant (F) on obtient que $y''' + y'' + y' = 3e^x$.
   Donc $y + y' + y'' = y''' + y'' + y'$.
   Donc $y = y'''$ et y est solution de (E).

2) Soit y une solution de $(E) : y''' = y$.
   En ajoutant $y' + y''$ aux deux membres, et en notant $z = y + y' + y''$, on a donc :
   $(E) \Rightarrow y' + y'' + y''' = y + y' + y'' \Rightarrow z' = z$.
   Donc $z = \lambda \exp$, ce qu'il fallait démontrer.

3) On note $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de (F).
   Montrons que $\mathcal{S}_1 = \{u + \lambda \exp, u \in \mathcal{S}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$ par double inclusion.
   $\mathcal{S}_1 \subset \{u + \lambda \exp, u \in \mathcal{S}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$: soit $y \in \mathcal{S}_1$.
   y est donc solution de (E), donc de $(G) : y + y' + y'' = \mu \exp$ où μ est un réel quelconque d'après la question 2).
   Or par théorème du cours, l'ensemble des solutions de cette dernière équation différentielle est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière de (G) et de la solution générale de $y + y' + y'' = 0$.
   De plus les solutions de (F) s'écrivent comme somme de exp (qui est solution particulière de (F)) et de la solution générale de $y + y' + y'' = 0$.
   Enfin, une solution particulière de (G) est $y_P = \frac{\mu}{3} \exp$.
   En notant $\lambda = \frac{\mu}{3} - 1$, les solutions de (G) s'écrivent donc
   $y = \frac{\mu}{3} \exp + y_H = \lambda \exp + \exp + y_H = \lambda \exp + u$ où u est une solution de (F).
   Nous avons bien démontré que $\mathcal{S}_1 \subset \{u + \lambda \exp, u \in \mathcal{S}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   $\{u + \lambda \exp, u \in \mathcal{S}_2, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{S}_1$: soit $y = u + \lambda \exp$ où u est une solution de (F) et λ un réel quelconque.
   Alors, d'après la question 1), u est solution de (E), $\lambda \exp$ aussi, donc y est solution de (E).
   Ceci démontre la seconde inclusion.

4) Résolution de (F) :
   $(E_c) : r^2 + r + 1 = 0$.
   $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ donc $r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $y_H = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$.

Enfin, exp est une solution particulière de (F) donc

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

5) D'après les deux dernières questions,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \lambda e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2.

- Partie A - Préliminaire

Par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, le produit du membre gauche est vide donc vaut 1 et $\dfrac{2^0(0!)^2}{(0)!} = 1$.

Pour $n = 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2}{2-1} = 2$ et $\dfrac{2^2(1!)^2}{(2)!} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et démontrons la au rang $n+1$.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{2(n+1)\times 2(n+1)}{(2n+1)\times(2n+2)} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}.$$

La propriété est initialisée en $n = 0$ (et $n = 1$), elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Partie B - Expression de W_n

1) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2) $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)\mathrm{d}t$

$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1}(t) \times (-\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \times (-\cos(t))\mathrm{d}t$

donc $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t$.

3) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^n t\mathrm{d}t \quad \text{donc} \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

$W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ ou encore $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

4) La question précédente permet d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$W_{2k} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \times W_0$.

En utilisant la partie préliminaire, on obtient donc $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

5) De même qu'à la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$,
$W_{2k+1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \times W_1 = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j-1} \times \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j+1}$.
Le second produit est télescopique, donc en utilisant la partie préliminaire, on obtient
$W_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} \times \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

6) Si n est pair, autrement dit $n = 2k, k \in \mathbb{N}$,
$W_n W_{n+1} = W_{2k} W_{2k+1} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2(2k+1)} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
Si n est impair, autrement dit $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$,
$W_n W_{n+1} = W_{2k+1} W_{2k+2} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \times \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)\pi}{4(k+1)^2 \times 2} = \frac{\pi}{2(2k+2)} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

Dans les deux cas on a bien, $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

- Partie C - Équivalent de W_n

1) $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin t \leq 1$, notamment on peut multiplier l'inégalité par $\sin t \geq 0$ sans changer son sens :
$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin^2 t \leq \sin t \leq 1$.

2) Les inégalités de la question précédente, valables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, permettent d'écrire (après multiplication par $\sin^n(t) \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire,
$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
Comme par ailleurs, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \sin^n(t) > 0$ et comme la fonction sin est continue,
$\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.
On en déduit donc en divisant par $W_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) Montrons d'abord que $W_n \sim W_{n+2}$: d'après B-3), on a $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \Rightarrow$
$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ qui est la définition de $W_n \sim W_{n+2}$.
En utilisant la question précédente à présent, on a alors par le théorème des gendarmes $\frac{W_{n+1}}{W_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $W_n \sim W_{n+1}$.

4) D'une part, d'après B-6), $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$. D'autre part d'après la question précédente,
$W_n \sim W_{n+1}$. Donc,
$W_n^2 \sim W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$ ce qu'il fallait démontrer.

5) Aucune règle du cours ne concerne les « racines carrées d'équivalents » mais la question précédente nous permet de penser que $W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$. Démontrons le :
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} = 1$ donc
$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- Partie D - Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}du$.

1) La fonction $u\mapsto e^{-u^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental du calcul différentiel, $F : x\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$ existe et est l'unique primitive de $u\mapsto e^{-u^2}$ s'annulant en 0.

2) $u\mapsto e^{-u^2}$ est positive pour tout $u\in\mathbb{R}$ donc sa primitive est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $F(0)=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}_+, F(x)\geq F(0)=0$.

3) Étudions la fonction $f : t\in\mathbb{R}\mapsto e^{-t}-1+t$ qui est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(t)=-e^{-t}+1\geq 0\Leftrightarrow e^t\geq 1\Leftrightarrow t\geq 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.
Comme de plus, $f(0)=1-1=0$, f passe par son minimum 0 en 0 et
$\forall t\in\mathbb{R}, 1-t\leq e^{-t}$.
Il s'agit maintenant de démontrer la seconde partie de l'inégalité : $\forall t\in[0;1], e^{-t}\leq\dfrac{1}{1+t}\Leftrightarrow$
$\forall t\in[0;1], 1+t\leq e^t\Leftrightarrow\forall t\in[-1;0], 1-t\leq e^{-t}$ ce que nous venons de démontrer.
Donc $\forall t\in[0;1], 1-t\leq e^{-t}\leq\dfrac{1}{1+t}$.

4) Posons $u=\sqrt{nt}$ donc $t=\dfrac{u^2}{n}$ (avec $n\in\mathbb{N}$) dans l'inégalité précédente :

$$\forall u\in\left[0;\sqrt{n}\right], 1-\frac{u^2}{n}\leq e^{-\frac{u^2}{n}}\leq\frac{1}{1+\dfrac{u^2}{n}}.$$

Cette inégalité concerne des termes qui sont tous positifs et la fonction $x\mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc en élevant à la puissance n :

$$\forall u\in\left[0;\sqrt{n}\right], \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n\leq\left(e^{-\frac{u^2}{n}}\right)^n=e^{-u^2}\leq\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n.$$

5) L'inégalité de la précédente question est vérifiée pour tout $u\in\left[0;\sqrt{n}\right]$ donc en utilisant la croissance de l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n du\leq\int_0^{\sqrt{n}}e^{-u^2}du\leq\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n}du$ où on reconnaît $F\left(\sqrt{n}\right)$ dans le membre central.

6) Par définition, $\forall n\in\mathbb{N}, W_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt$.
Effectuons le changement de variable $s=\frac{\pi}{2}-t$, $t=\frac{\pi}{2}-s$, $dt=-ds$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, W_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-s\right)ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(s)ds \text{ car } \forall s\in\mathbb{R}, \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-s\right)=\cos(s).$$

7) Effectuons le changement de variable $u=\sqrt{n}\sin v$, $du=\sqrt{n}\cos v dv$:
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{n\sin^2 v}{n}\right)^n\sqrt{n}\cos v dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 v\right)^n\sqrt{n}\cos v dv=\sqrt{n}W_{2n+1}$
d'après le résultat de la question précédente.

8) $u=\sqrt{n}\tan v$, $du=\sqrt{n}\times\dfrac{1}{\cos^2 v}\times dv$:

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{n\tan^2 v}{n}\right)^{-n} \sqrt{n} \times \frac{1}{\cos^2 v} \times \mathrm{d}v = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 v\right)^{n-2} \mathrm{d}v \leq$ $\sqrt{n}W_{2n-2}$ car l'intégrande est positive donc l'intégrale croissante.

9) D'après la question 2), nous savons que F est croissante donc $\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right], F\left(\sqrt{n}\right) \leq F(x) \leq F\left(\sqrt{n+1}\right)$.
Or, d'après les questions 5), 7) et 8), nous savons de plus que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n}W_{2n+1} \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.
On a donc, $\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right], \sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(x) \leq \sqrt{n+1}W_{2n}$.

Enfin, d'après C-5), $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{n+1}W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2\times 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.