Correction DM n°4

Partie A - Une intégrale farouche

1) $a_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \times 1\mathrm{d}t = 0.$

$a_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0}{2} = \frac{1}{2}.$

$a_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t = \frac{-2\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^4(0)}{4} = \frac{1}{2}.$

Pour a_3, on commence par linéariser :

$$\begin{aligned}
\sin(3t)\cos^3(t) &= \left(\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right)\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{3it} - e^{-3it}\right)\left(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\right)}{16i} \\
&= \frac{e^{6it} + 3e^{4it} + 3e^{2it} + 1 - 1 - 3e^{-2it} - 3e^{-4it} - e^{-6it}}{16i} \\
&= \frac{2i\sin(6t) + 6i\sin(4t) + 6i\sin(2t)}{16i} \\
&= \frac{\sin(6t) + 3\sin(4t) + 3\sin(2t)}{8}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
a_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(6t) + 3\sin(4t) + 3\sin(2t)}{8}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-\cos(6t)}{48} - \frac{3\cos(4t)}{32} - \frac{3\cos(2t)}{16}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2 - 9 + 18 + 2 + 9 + 18}{96} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

2) On intègre par parties pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\cos^n(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\sin(t)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} - \left[\frac{\sin(nt)}{n}\sin(t)\cos^{n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{n}\left(-(n-1)\sin^2(t)\cos^{n-2}(t) + \cos^n(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} + a_n - \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{n-1}{n}b_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow b_n = \dfrac{1}{n-1}$.

3) Pour tout entier $n > 0$:

$\sin(nt)\cos(t) = \dfrac{\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t)}{2}$ donc

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((n+1)t)+\sin((n-1)t)}{2}\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_{n-1}+b_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

4) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)}$.

Initialisation

$a_0 = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)} = 0$ (somme vide).

Hérédité

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)}$. Alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n+b_{n+2}}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+2}(n-k)} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}(n+1-k)} \end{aligned}$$

Conclusion

La propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)}$$

5) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k}}{2^{k+1}(n-k)}$.

a) $f_n(0) = 0$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k}2^{k+1}(n-k)} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$f_n(1) = a_n$.

b) f_n est une fonction polynôme, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout réel x,

$f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k-1}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2x)^k$.

Donc pour $x \neq \dfrac{1}{2}$, $2^n f_n'(x)$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2x \neq 1$ et par conséquent :

$f_n'(x) = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} = \dfrac{2^n x^n - 1}{2^n(2x-1)}$

d) $x \mapsto \dfrac{2^n x^n - 1}{2^n(2x-1)}$ est définie et continue sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, on cherche donc une primitive en intégrant sur l'un de ces deux intervalles.

En effectuant le changement de variable $u = 2t-1$,

$$\frac{1}{2^n}\int^x \frac{2^n t^n - 1}{2t-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n+1}}\int^{2x-1} \frac{2^n\left(\frac{u+1}{2}\right)^n - 1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2^{n+1}}\int^{2x-1} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k - 1}{u}\mathrm{d}u.$$

En remarquant que le terme de degré 0 de la somme s'annule et que les autres termes

sont de degré supérieur à 1 et se simplifient donc avec le dénominateur on obtient : $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\int^x \dfrac{2^nt^n-1}{2t-1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\int^{2x-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{k-1}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{u^k}{k}\right]^{2x-1}$
c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n}\int^x \frac{2^nt^n-1}{2t-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2x-1)^k}{k}$$

valable, on le rappelle, sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$ ***ou sur*** $]\frac{1}{2};+\infty[$.

e) Sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$, f_n et $x\mapsto \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}$ sont deux primitives de $x\mapsto \dfrac{2^nx^n-1}{2^n(2x-1)}$,
donc il existe $c_1\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$,
$f_n(x)=c_1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}$.
De même, sur $]\frac{1}{2};+\infty[$, il existe $c_2\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$,
$f_n(x)=c_2+\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}$.
Or f_n ***et*** $x\mapsto \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}$ ***sont toutes les deux continues sur*** $\mathbb{R}$.
Donc $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} c_1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}=c_1$
et de même $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} c_2+\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(2x-1)^k}{k}=c_2$.
Donc $c_1=c_2$.
De plus, $f_n(0)=0=c_1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^k}{k}$ donc $c_1=c_2=\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Or $f_n(1)=a_n$ donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{1}{k}$.
Dans ces deux dernières sommes, si k est impair, $(-1)^{k+1}=1$ et les termes s'ajoutent, tandis que si k est pair, $(-1)^{k+1}=-1$ et les termes s'annulent. Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}(n-k)}=\frac{1}{2^n}\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

f) En reprenant les résultats de la question précédentes, on a aussi pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ d'après la question 5)a) et

$$f_n\left(\tfrac{1}{2}\right)=c_1=c_2=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\binom{n}{k}}{k}.$$

Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{k}$$

Partie B - Étude générale

1) Pour tout entier p,

$A_{0,p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \times \cos^p(t)\mathrm{d}t = 0$ et

$A_{1,p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^p(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos^{p+1}(t)}{p+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{p+1}$

Pour tout entier $n \geqslant 2$ (pour $n = 0$ et $n = 1$, les intégrales précédentes donnent le résultat recherché),

$A_{n,0} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n}$

$A_{n,1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\cos(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos((n+1)t)}{2(n+1)} + \frac{-\cos((n-1)t)}{2(n-1)}\right]_0^{\pi/2}$ donc

$A_{n,1} = \dfrac{1-\cos((n+1)\pi/2)}{2(n+1)} + \dfrac{1-\cos((n-1)\pi/2)}{2(n-1)}$

2) On intègre par parties pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\cos^p(t)\right]_0^{\pi/2} - \frac{p}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\sin(t)\cos^{p-1}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n} - \left[\frac{p\sin(nt)}{n^2}\sin(t)\cos^{p-1}(t)\right]_0^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{p}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\big(-(p-1)\sin^2(t)\cos^{p-2}(t) + \cos^p(t)\big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n} + \frac{p^2}{n^2}A_{n,p} - \frac{p(p-1)}{n^2}A_{n,p-2} \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par n^2 et en regroupant les $A_{n,p}$ dans le membre de gauche, on obtient donc :

$(n^2 - p^2)A_{n,p} = n - p(p-1)A_{n,p-2}$, formule qui reste valable pour $n = 0$ puisque dans ce cas $A_{0,p} = 0$ pour tout entier p.

En réindexant alors par $p \mapsto p + 2$ on obtient, pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$,

$$(n-p-2)(n+p+2)A_{n,p+2} = n - (p+2)(p+1)A_{n,p}$$

3) Pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$:

$\sin(nt)\cos(t) = \dfrac{\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t)}{2}$ donc

$$\begin{aligned} A_{n+1,p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((n+2)t) + \sin((n)t)}{2}\cos^p(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{A_{n+2,p} + A_{n,p}}{2} \end{aligned}$$

4) D'après la question 1), pour tout entier naturel p et tout entier naturel n, $A_{0,p} = 0 \in \mathbb{Q}$, et $A_{n,0} = \dfrac{1-\cos(n\pi/2)}{n}$ où $\cos(n\pi/2) \in \{-1; 0; 1\}$ donc $A_{n,0} \in \mathbb{Q}$.

Démontrons par récurrence sur p que pour tout entier naturel n et tout entier naturel p,

$A_{n,p}$ est rationnel.

Initialisation :

pour $p = 0$, nous venons de voir que pour tout entier naturel n, $A_{n,0} \in \mathbb{Q}$.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout entier naturel n on ait $A_{n,p} \in \mathbb{Q}$.

Alors, $A_{0,p+1} \in \mathbb{Q}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$A_{n,p+1} = \dfrac{A_{n+1,p} + A_{n-1,p}}{2}$ est la moyenne arithmétique de deux nombres rationnels d'après la propriété de récurrence.

Conclusion :

La propriété est initialisée au rang $p = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, $A_{n,p}$ est rationnel.

5) On utilise les résultats des questions 1) et 3) : la question 1) permet de remplir la première colonne et la première ligne du tableau, et la formule de récurrence de la question 3) permet ensuite de remplir (cases rouges) de proche en proche chaque case en faisant la moyenne des cases situées sur la colonne immédiatement à gauche et sur les lignes supérieures et inférieures :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	
2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{63}$	
4	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{3}{10}$	
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{105}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{83}{315}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{61}{231}$	
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{58}{315}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{146}{693}$	$\frac{13}{60}$	
						b_n		a_n

Au passage, on peut identifier les intégrales a_n et b_n de la première partie sur les diagonales respectivement vertes et bleues du tableau.

6) On peut par exemple utiliser la formule de récurrence fournie à la question 3) comme on l'a fait pour remplir le tableau de valeurs précédent :

```
def C(n):
    if n%2==1:
        return 0
    return (-1)**(n//2)
def Approx(n, p, mem = {}):
    if (n,p) in mem:
        return mem[(n,p)]
    if n == 0:
        mem[(n,p)] = 0
        return 0
    if p == 0:
        mem[(n,p)] = (1-C(n))/n
        return mem[(n,p)]
    mem[(n,p)] = (Approx(n-1,p-1)+Approx(n+1,p-1))/2
    return mem[(n,p)]
```

7) Comme à la question précédente, mais en effectuant les opérations sur les fractions. Pour les obtenir simplifiées, on définit aussi une fonction `pgcd` et une fonction `moyenne` :

```
def pgcd(a,b):
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
    return a
def moyenne(u,v):
    a,b = u
    c,d = v
    e = a*d+c*b
    pg = pgcd(e,2*b*d)
    return (e//pg, 2*b*d//pg)
def A(n, p, mem = {}):
    if (n,p) in mem:
        return mem[(n,p)]
    if n == 0:
        mem[(n,p)] = (0,1)
        return (0,1)
    if p == 0:
        if n%4==2:
            mem[(n,p)] = (1,n//2)
        elif n%4==0:
            mem[(n,p)] = (0,1)
        else:
            mem[(n,p)] = (1,n)
        return mem[(n,p)]
    mem[(n,p)] = moyenne(A(n-1,p-1),A(n+1,p-1))
    return mem[(n,p)]
```