Fonctions de référence, systèmes, équations différentielles et calcul intégral

L'usage d'une calculatrice est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs**.*

Cours

Donner les formules pour $\cos(2x)$ (les trois...), $\sin(2x)$, $\tan(2x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.

Exercices

Exercice 1.

1) Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et solutions de

$$(E_1) : y' - \frac{2t}{1+t^2} y = 1$$

2) Donner l'ensemble des fonctions $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables et solutions de

$$(E_2) : 3z'' - 5z' - 2z = e^{2t}$$

Exercice 2.

Résoudre le système suivant d'inconnues ***complexes*** u, v, w :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} iu & + & v & + & w & = & -1 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 \\ u & + & v & + & iw & = & 1 \end{array} \right.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 3.

Résoudre

$$(E) : y' - \frac{1}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x}$$

où la fonction inconnue y est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$(F) : u'' + u = \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$$

où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Écrire, pour t un réel quelconque, $\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $A\cos(t+\phi)$ avec $A \in \mathbb{R}_+$ et $\phi \in \mathbb{R}$ à préciser.
2) Résoudre (F).

Exercice 5.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ définie pour tout entier naturel n.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.
2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2}$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}\end{aligned}$$

4) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$.
5) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
6) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.