Correction DS n°3

Exercice 1.

1) $y' - \dfrac{2t}{1+t^2}y = 1$:

Équation homogène : $y' - \dfrac{2t}{1+t^2}y = 0$

$y = \lambda \exp\left(\displaystyle\int^t \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u\right) = \lambda(1+t^2), \lambda \in \mathbb{R}.$

Solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante :

$\lambda'(1+t^2) = 1$ et on choisit $\lambda = \operatorname{Arctan} t$.

Conclusion : la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre donc

$y = (\lambda + \operatorname{Arctan} t)\,(1+t^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $3z'' - 5z' - 2z = e^{2t}$:

On résout l'équation caractéristique :

$3x^2 - 5x - 2 = 0$, $\Delta = 25 + 24 = 49$, $S = \left\{\dfrac{5 \pm 7}{6}\right\} = \left\{2; \dfrac{-1}{3}\right\}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc $z = \lambda e^{2t} + \mu e^{\frac{-t}{3}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solution particulière de l'équation avec second membre : on cherche z sous la forme Ute^{2t} car 2 est solution simple de l'équation caractéristique.

$z' = (2Ut + U)\,e^{2t}$.

$z'' = (4Ut + 4U)\,e^{2t}$

$3z'' - 5z' - 2z = U\,(12t + 12 - 10t - 5 - 2t)\,e^{2t} = e^{2t}$

$\Leftrightarrow U = \dfrac{1}{7}$

Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions

$$z = \frac{te^{2t}}{7} + \lambda e^{2t} + \mu e^{\frac{-t}{3}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 2.

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} iu & + & v & + & w & = & -1 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 \\ u & + & v & + & iw & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} & & 2v & + & (1-i)w & = & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - iL_2 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 & \\ & & (1-i)v & + & (i-1)w & = & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} & & (3-i)v & & & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 & \\ & & (1-i)v & + & (i-1)w & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} v & = & 0 \\ u & = & -w = \frac{1+i}{2} \\ w & = & \frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} \end{array}\right.$$

Finalement, ce système possède une unique solution $(u;v;w)$ qui est

$$(u;v;w) = \left(\frac{1+i}{2};0;\frac{-1-i}{2}\right)$$

Exercice 3.

Résolvons l'équation homogène : $(E_H) : y' - \dfrac{1}{1-x^2}y = 0$.

On calcule $-A(x) = \displaystyle\int^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t$.

Pour cela, on cherche $(b;c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{b}{1-t} + \dfrac{c}{1+t}$.

En multipliant par $1-t$ on a donc $\dfrac{1}{1+t} = b + \dfrac{c(1-t)}{1+t}$, donc $b = \dfrac{1}{2}$ après évaluation en $t = 1$.

De même, en multipliant par $1+t$ on a donc $\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{b(1+t)}{1-t} + c$, donc $c = \dfrac{1}{2}$ après évaluation en $t = -1$.

Donc $-A(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]^x$ puisqu'on cherche une primitive sur $]-1;1[$.

Donc $-A(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ (après simplifications).

Donc $y_H = \lambda e^{-A(x)} = \lambda\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Trouvons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante :

$\lambda'\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow \lambda' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \lambda = \mathrm{Arcsin}(x)$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto (\lambda + \mathrm{Arcsin}(x))\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \text{où} \;\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 4.

1) On cherche A réel positif et ϕ réel tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t) = A\cos(t+\phi)$.
Or $A\cos(t+\phi) = A\cos(t)\cos(\phi) - A\sin(t)\sin(\phi)$.
On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} A\cos(\phi) & = & 1 \\ A\sin(\phi) & = & \sqrt{3} \end{array}\right.$
Donc $A^2\cos^2(\phi) + A^2\sin^2(\phi) = A^2 = 1+3 = 4$.
Donc $A = 2$ et $\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\phi) & = & \dfrac{1}{2} \\ \sin(\phi) & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$ et on pose, par exemple, $\phi = \dfrac{\pi}{3}$.

2) $(F) \Leftrightarrow u'' + u = \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ d'après la question précédente :
Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$ qui a deux solutions $r = i$ ou $r = -i$.
L'équation homogène a donc pour solutions $u = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On cherche une solution particulière de l'équation $u'' + u = 2e^{\frac{i\pi}{3}}e^{it}$ sous la forme $u = Ute^{it}$ puisque i est solution simple de l'équation caractéristique.
$u' = (iUt + U)e^{it}$.
$u'' = (-Ut + 2iU)e^{it}$
$u'' + u = 2iUe^{it} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}e^{it}$
$\Leftrightarrow U = e^{\frac{i\pi}{3} - \frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{-i\pi}{6}}$
Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions

$$u = t\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5.

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$
$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$
$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - I_0 = \frac{4-\pi}{4}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Initialisation :

$(-1)^0 I_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \dfrac{(-1)^k}{2k-1} = \dfrac{\pi}{4}$

De même, $(-1)^0 I_{2\times 0+1} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \dfrac{(-1)^k}{2k} = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Hérédité :

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I_{2(n+1)} &= (-1)^{n+1} I_{2n+2} \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1} - I_{2n}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + (-1)^n I_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I_{2(n+1)+1} &= (-1)^{n+1} I_{2n+3} \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2} - I_{2n+1}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + (-1)^n I_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$.

- $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car le membre droit est un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur strictement positif.
- $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$ d'après le point précédent.
- $1 + x^2 \geqslant 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dont on déduit que $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$.

Donc pour tout entier positif n et tout $x \in [0;1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$

5) En intégrant l'encadrement de la question précédente, valable pour tout $x \in [0;1]$, sur le segment $[0;1]$, on obtient, pour tout entier positif n :
$\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$
d'où, pour tout entier positif n,
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive, donc convergente, et en utilisant le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

6) D'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = (-1)^n I_{2n} - \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = -(-1)^n I_{2n} + \frac{\pi}{4}$
Or d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

7) De même, d'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -2(-1)^n I_{2n+1} + 2\frac{\ln(2)}{2}$
Or d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$