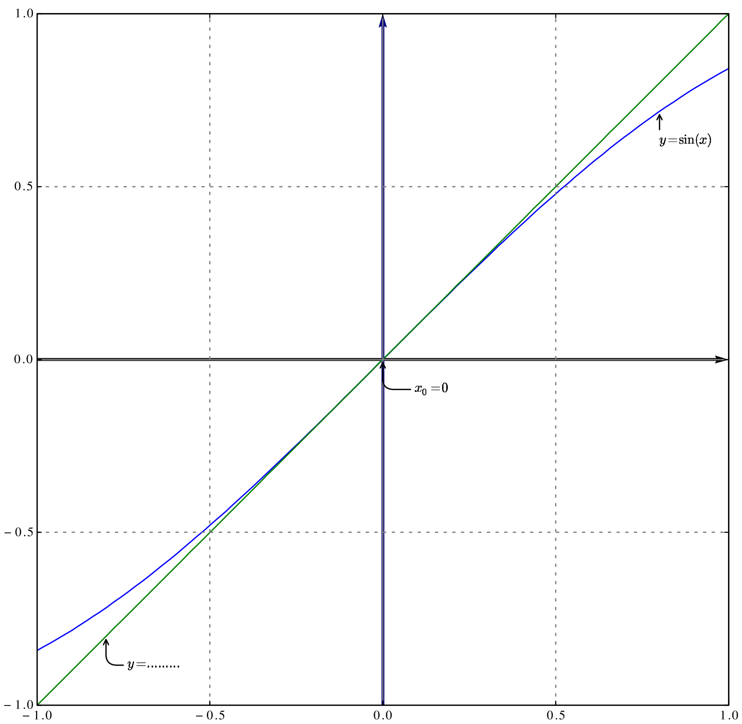
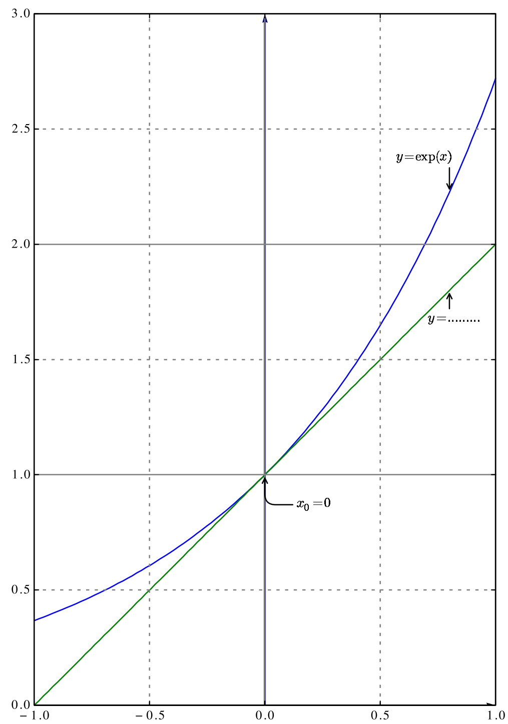
Développements limités

L'IDÉE fondamentale à l'origine des développements limités repose sur une généralisation de la notion de tangente : au voisinage d'un point x_0, la valeur $f(x_0+h)$ d'une fonction f dérivable peut être approximée par $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$, ce qui revient à approximer f par une fonction affine au voisinage de x_0.
Par exemple, au voisinage de 0 : $\sin h \approx$.................... ou encore $e^h \approx$....................





Peut-on obtenir des « approximations de meilleure qualité » à l'aide de polynômes de degré supérieur ?
L'objectif de ce chapitre est d'une part de ***clarifier la notion d'approximation*** d'une suite par une autre suite ou d'une fonction par une autre fonction, d'autre part d'élaborer des outils permettant d'obtenir des ***approximations polynomiales des fonctions usuelles***.

I. Équivalence, domination, négligeabilité

I.1. Notion de voisinage

Définition 11.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0=-\infty$ ou $x_0=+\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :
- $x_0=+\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;

- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Relations de comparaison entre suites

Définition 11.2 (Équivalence de suites)

On dit que la suite u est ***équivalente à*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si

- ***il existe un rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 1.

Notation

Si la suite u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Définition 11.3 (Domination)

On dit que la suite u est ***dominée par*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si

- ***il existe un rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ est borné : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$.

Notation

Si la suite u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Définition 11.4 (Négligeabilité)

On dit que la suite u est ***négligeable devant*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si

- ***il existe un rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 0.

Notation

Si la suite u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$.

Ex. 11.1 Comparer les suites :

- $u_n = n$ et $v_n = n^2$;
- $u_n = n$ et $v_n = \sqrt{1+n^2}$;
- $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$;
- $u_n = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
- $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

Cor. 11.1

I.3. Relations de comparaison entre fonctions

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

Définition 11.5 (Équivalence de fonctions)

On dit que la fonction f est ***équivalente à*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation

Si la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Définition 11.6 (Domination)

On dit que la fonction f est ***dominée par*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage I de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné sur I : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$.

Notation

Si la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O\left(g(x)\right)$.

Définition 11.7 (Négligeabilité)

On dit que la fonction f est ***négligeable devant*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation

Si la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\left(g(x)\right)$ ou plus simplement $f(x) = \underset{x_0}{o}\left(g(x)\right)$.

I.4. Propriétés des équivalents

Propriété 11.8 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

Soit I un intervalle, a un point intérieur à I et f, g, h trois fonctions réelles telles que

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Si de plus $h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Démonstration

Ex. 11.2 Montrer que $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Propriété 11.9

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ et $w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} z(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et w ne s'annulent pas ;
2) $v(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)$ et $z(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x)$;
3) $u(x)w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)z(x)$;
4) $\dfrac{u(x)}{w(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{v(x)}{z(x)}$;
5) $\forall p \in \mathbb{Z}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$ et si $v > 0$ au voisinage de x_0, $\forall p \in \mathbb{R}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$.

Démonstration

Ex. 11.3 Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de :
- $x \mapsto \sin(x)$;
- $x \mapsto \exp(x) - 1$;
- $x \mapsto \ln(1+x)$;
- $x \mapsto \cos(x) - 1$.

Déduire du dernier équivalent la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$.

Cor. 11.3

Important !

$\cos(x)$	est équivalent à	$1+x$	en 0 car $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1+x} = 1$
-1	est équivalent à	-1	en 0... et partout ailleurs ! ***Mais***
$\cos(x) - 1$	***n'est pas équivalent à***	$\cancel{x}$	en 0 d'après l'exercice précédent.

Il ***n'est donc pas autorisé de faire une somme d'équivalents*** !
On préférera pour les calculs la notion de ***développement limité*** que l'on verra plus loin.

Ex. 11.4
1) Montrer que $\ln(e+x)$ et $\cos(x)$ sont équivalents pour $x \to 0$.
2) Trouver un équivalent simple de $\ln(e+x) - 1$ pour $x \to 0$.

Cor. 11.4

Propriété 11.10 (Propriétés conservées par équivalence)

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et v sont de même signe ;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ existe et en cas d'existence, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$.

Démonstration

I.5. Propriétés des « petit o »

Propriété 11.11 (Équivalent et « petit o »)

$u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ si et seulement si $u(x) = v(x) + \underset{x\to x_0}{o}(v(x))$.

Démonstration

Propriété 11.12 (Traduction des croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
- $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$;
- si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\alpha\right)$;
- quel que soit le réel λ, $\lambda^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$;
- ***MAIS***, $n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$.

Ex. 11.5 Montrer que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$,

1) $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^\beta\right)$;
2) $e^{\gamma x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$.

Cor. 11.5

Remarque

On retiendra notamment que la propriété 11.11 permet d'utiliser les « petit o » pour traiter les questions concernant les équivalents. ***Cette propriété doit absolument être connue***. De plus, la propriété $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ est elle aussi d'une importante primordiale pour la suite du chapitre. Notons $f(x) \underset{0}{\ll} g(x)$ le fait que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(g(x))$: on a alors les

> négligeabilités suivantes
>
> ***Au voisinage de*** 0 : $\quad ... \underset{0}{\ll} x^3 \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{0}{\ll} ...$
>
> ***Au voisinage de*** $+\infty$: $\quad ... \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{\infty}{\ll} 1 \underset{\infty}{\ll} x \underset{\infty}{\ll} x^2 \underset{\infty}{\ll} x^3 \underset{\infty}{\ll} ...$
>
> L'idée générale des développements limités est fondée sur cette propriété : ***nous allons approximer des fonctions au voisinage de*** 0 par des ***polynômes de degré*** n en ***négligeant tous les termes de degré strictement supérieur à*** n.
>
> ***Pour une approximation ailleurs qu'en*** 0***, on fera un changement de variable.***

Ex. 11.6 Écrire, avec les mêmes notations que dans la remarque précédente, les relations de négligeabilité

1) au voisinage de -3 ;
2) au voisinage de x_0.

Cor. 11.6

Propriété 11.13 (Calcul avec des « petit o »)

Soit n et p deux entiers, I un intervalle contenant 0, f et g deux fonctions définies et continues sur I

Propriétés	Traduction dans les calculs
•Si f et g sont négligeables devant x^n au voisinage de 0, alors $f+g$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0.	$\underset{x\to0}{o}(x^n) + \underset{x\to0}{o}(x^n) = \underset{x\to0}{o}(x^n)$
•Si f est négligeable devant x^n au voisinage de 0 et que g est négligeable devant x^p au voisinage de 0, alors $f \times g$ est négligeable devant x^{n+p} au voisinage de 0.	$\underset{x\to0}{o}(x^n) \times \underset{x\to0}{o}(x^p) = \underset{x\to0}{o}(x^{n+p})$
•On suppose $p > n$. Si f est négligeable devant x^n au voisinage de 0 et que g est négligeable devant x^p au voisinage de 0, alors $f+g$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0.	Si $p > n$, $\underset{x\to0}{o}(x^n) + \underset{x\to0}{o}(x^p) = \underset{x\to0}{o}(x^n)$
•Soit r ***un nombre réel (ou complexe) quelconque***. Si f est négligeable devant x^n au voisinage de 0, alors $r \times f$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0.	$\forall r \in \mathbb{K}$, $r \times \underset{x\to0}{o}(x^n) = \underset{x\to0}{o}(x^n)$
•etc...	$x^p \times \underset{x\to0}{o}(x^n) = \underset{x\to0}{o}(x^{n+p})$
•...	$\left(\underset{x\to0}{o}(x^n)\right)^p = \underset{x\to0}{o}(x^{np})$

II. Développements limités

II.1. Définitions

Définition 11.14

On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** x_0 et on note f ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si

$$\exists (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

Ou encore, au voisinage de 0, en utilisant $h = x - x_0$ et le signe $\sum$ à la place des pointillés :

$$f(x_0 + h) = \ldots\ldots\ldots + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

La somme .... est appelée ***partie principale*** du DL.

$\underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$ ou $\underset{h \to 0}{o}(h^n)$ est appelé ***reste du*** DL.

Remarque

Comme le changement de variable $h = x - x_0$ est toujours possible, on considèrera souvent par la suite des développements limités en 0, ou on s'y ramènera par changement de variable. En particulier en l'absence d'indications, les « petit o » sont supposés être donnés au voisinage de 0.

II.2. Premier exemple

Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

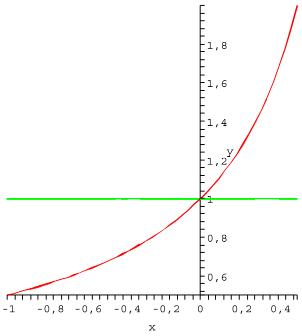
pour tout $x \in]-1;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ = ...

= ....

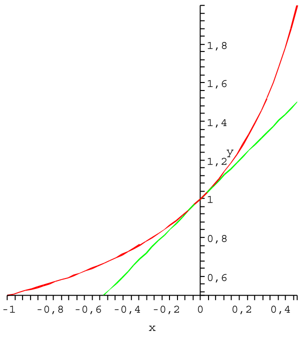
....

II.3. Interprétation géométrique

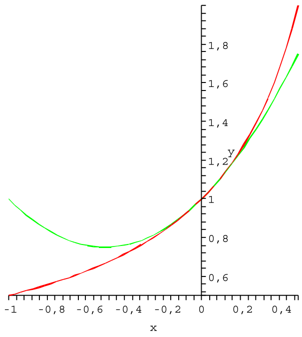
Plus l'ordre du DL est grand, plus la représentation graphique de sa partie principale se rapproche au voisinage de x_0 de $\mathcal{C}_f$.



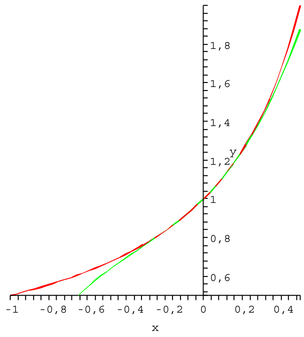
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto 1$



et $x \mapsto 1 + x$



et $x \mapsto 1 + x + x^2$



et $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$

II.4. DL, continuité, dérivabilité

Proposition 11.15

Soit x_0 ***un nombre réel***. Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ alors :

- ou bien f est définie en x_0, auquel cas f est continue en x_0 ;
- ou bien f n'est pas définie en x_0, auquel cas f peut être prolongée en une fonction continue en x_0.

Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors f (ou son prolongement continu) est ***dérivable*** en x_0.
Ceci ne se généralise pas au cas $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une fonction admette un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ sans pour autant être deux fois dérivable en x_0.

Démonstration

II.5. Unicité

Proposition 11.16

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors il est unique.

Démonstration

Important !

En revanche, étant donné un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il existe une infinité de fonctions possédant ce développement limité :

II.6. Troncature et équivalent

Proposition 11.17

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, alors $\forall k \in [\![0; n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_k(x_0)$ dont la partie principale est la troncature de celle du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Démonstration

Propriété 11.18 (Équivalent d'une fonction)

Étant donnés un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, le premier terme non nul du développement limité de f au voisinage de x_0 est un équivalent de $f(x_0 + h)$ au voisinage de $h \to 0$.

Démonstration

Ex. 11.7 Donner un équivalent de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ au voisinage de 0.

Ex. 11.8 Donner un équivalent de $x \mapsto \dfrac{1}{2+x} - \dfrac{1}{4}$ au voisinage de 2.

II.7. Opérations sur les DL

Propriété 11.19

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et possédant pour $n \in \mathbb{N}$ un développement limité à l'ordre n en x_0 de parties principales P et Q, alors :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$;
- $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont partie principale est la troncature à l'ordre n de PQ ;
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0.

Démonstration

Ex. 11.9 Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{2}{1+x} - 3$.
Quel est le signe de $f(x) - 7x^2$ au voisinage de 0 ?

Théorème 11.20

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f.

Plus précisément, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Corollaire 11.21

Si f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ ***et si*** f' ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui de f' est obtenu en dérivant celui de f.

Important !

Le théorème 11.20 signifie plus simplement que l'on peut primitiver un développement limité. Attention simplement à ne pas oublier la « constante d'intégration » $F(0)$.
Dans son corollaire, la condition « f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ » est primordiale. Sans elle, on ne peut pas dériver un développement limité.

Ex. 11.10 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $x \mapsto e^x$.

II.8. Formule de Taylor-Young

Définition 11.22 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I est ***de classe*** $\mathcal{C}^n$ ***sur*** I, si elle est n fois dérivable en tout point de I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Théorème 11.23 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

Démonstration

La démonstration sera effectuée dans le chapitre sur l'intégration.

Méthode : Utilisation de la formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors f admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$ celui donné par la formule de Taylor-Young.
Cependant, il y a souvent plus simple pour obtenir ce développement limité.
La formule de Taylor-Young est de ce fait davantage un outil théorique qu'un outil pratique.

Important !

On rappelle (voir proposition 11.15) que f peut admettre un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ sans pour autant être $\mathcal{C}^n(x_0)$. Mais si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, elle possède en tout point de I un unique développement limité à l'ordre n donné par la formule de Taylor-Young.

Ex. 11.11 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto e^x$, le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$, enfin obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarques

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ incite à généraliser la définition des coefficients binomiaux :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} =$ ....

On a alors $(1+x)^\alpha =$ ....

Ex. 11.12 $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Cor. 11.12

II.9. Résumé

Voici une liste des DL(0) à connaître et de la façon dont on les obtient :

Fonction	DL(0)	Démonstration
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	Somme des termes d'une suite géométrique.
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto e^x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie paire de e^x.
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie impaire de e^x.
$x \mapsto \cos x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{R}e\,(e^{ix})$.
$x \mapsto \sin x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{I}m\,(e^{ix})$.
$x \mapsto \tan x$	$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Quotient de sin par cos, $\tan' = 1 + \tan^2$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Les développements limités en 0 de Arccos et Arcsin s'obtiennent par primitivation.
Ils ne sont pas à retenir. On les retrouve au besoin pour de petites valeurs de n.

III. Utilisations

III.1. Limite

Les développements limités constituent un outil ***extrêmement efficace*** pour le calcul des limites. Notamment, en cas d'indétermination, la plupart du temps, un développement limité permet de lever l'indétermination.

Ex. 11.13 Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$.

Ex. 11.14 Soit x un réel.
Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

III.2. Tangente et position par rapport à la tangente

Les propriétés 11.10 et 11.15 permettent d'obtenir l'équation de la tangente en un point à une représentation graphique grâce aux développements limités, ainsi que la position relative de la représentation graphique par rapport à la tangente.
Plus précisément, nous avons démontré :

> **Théorème 11.24 (Utilisation des développements limités)**
>
> Soit f une fonction définie sur un voisinage I du réel x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.
>
> - Si f possède un développement limité $f(x_0 + h) = a_0 + \underset{h \to 0}{o}(1)$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$. De plus, soit f est définie et continue en x_0, soit f est prolongeable par continuité par a_0 en x_0 (voir la proposition 11.15).
> - Si f possède un développement limité $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + \underset{h \to 0}{o}(h^p)$ (avec $a_p \neq 0$) alors
>   - ⋆ f est continue ou prolongeable par continuité par a_0 en x_0 ;
>   - ⋆ f (ou son prolongement) est dérivable et $f'(x_0) = a_1$;
>   - ⋆ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$;
>   - ⋆ on peut connaître les positions relatives de la courbe et de sa tangente en étudiant le signe de $a_p h^p$ au voisinage de $h \to 0$.
> - Le premier terme non nul du développement limité de f en x_0 fournit un équivalent de f au voisinage de x_0 (voir la proposition 11.18).

Ex. 11.15 Effectuer un développement limité de $g : x \mapsto \ln(2 + 2x + x^2)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à cette tangente.

Ex. 11.16 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

1) Déterminer si u converge et si oui, donner sa limite.
2) Dans le cas où u converge vers $l \neq 0$, donner un équivalent (simple) de $u_n - l$.

III.3. Asymptotes et développements asymptotiques

Durant tout le chapitre, nous avons considéré des développements limités, c'est-à-dire des développements de la forme $f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$. On peut généraliser cette notion en admettant tous les développements de la forme :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=-p}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

De tels développements sont appelés ***développements limités généralisés*** ou encore ***développements asymptotiques***.

Ex. 11.17 Donner les 4 premiers termes du développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ en 0.

Cor. 11.17

Méthode : Détermination d'asymptotes obliques

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la représentation graphique d'une fonction f en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Les développements ***asymptotiques*** peuvent être utilisés pour l'obtention d'***asymptotes obliques*** à la représentation graphique d'une fonction f en posant pour $x \to \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \to 0$ puis en développant $f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0 :

si $f\left(\frac{1}{h}\right) = \dfrac{a}{h} + b + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f.

Ex. 11.18 Effectuer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire la position de C_f relativement à ses asymptotes.

Cor. 11.18

Ex. 11.19 Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
2) Montrer que la représentation graphique de g possède deux asymptotes obliques au voisinage de $\pm\infty$.
   On donnera une équation de chacune des asymptotes obliques.
3) Étudier les variations de g et construire sa représentation graphique.

Cor. 11.19

III.4. Divers

Ex. 11.20 Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ est définie au voisinage de $+\infty$, et admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

Quelle est la position de la courbe représentative de f et de son asymptote ?

Ex. 11.21 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n - 1 \leqslant u_n \leqslant n$.
2) En déduire un équivalent de u_n puis donner un développement asymptotique de u_n à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex. 11.22

1) Montrer que l'équation $x^3 + nx = 1$ admet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une unique solution réelle, notée x_n.
2) Comment appelle-t-on le mode de définition de la suite u ?
3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
4) En déduire la limite de x_n puis que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
5) Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.