Exercice corrigé

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

18 janvier 2026

Correction des exercices 9.7 et 9.20

Ex. 7 (Cor.) Un particulier emprunte une somme M à sa banque pour un achat immobilier.
Un mois après son emprunt, il paye sa première mensualité m. Mais il y a des intérêts sur la somme qu'il a empruntée, de sorte que le montant restant à rembourser après sa première mensualité est de

$$S_1 = M \times (1+t) - m$$

où t est le taux d'intérêt ***mensuel*** de son emprunt.
Le même raisonnement vaut pour les mois suivants, ce qui a pour conséquence que la suite des montants restant à rembourser est une suite arithmético-géométrique donnée par

$$S_0 = M \quad \textbf{et} \quad \forall n \in [\![0; N-1]\!], S_{n+1} = S_n \times (1+t) - m$$

où N est le nombre de mois que dure l'emprunt.

1) Quel est le montant minimal m_0 de la mensualité garantissant que la suite S des sommes restant à rembourser est décroissante ?
2) On suppose que $m > m_0$. Combien de mois va durer l'emprunt ?
3) ***Application numérique*** : on suppose que $M = 100000$€, $t = 0,3\% = \dfrac{3}{1000}$ et $m = 2m_0$.
Calculer m_0 puis le nombre de mois N sur lequel s'étale le remboursement.
Enfin, calculer la dernière mensualité versée par l'emprunteur (attention ! la dernière mensualité est d'un montant généralement différent des précédentes).

Cor. 7 :

1) Pour que la suite des sommes restant à rembourser soit décroissante, il faut et il suffit que

$$\forall n, S_{n+1} - S_n \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall n, tS_n - m \leqslant 0$$

Comme la suite est décroissante, il faut et il suffit donc que $m \geqslant tS_0$.
Le montant minimal de la mensualité garantissant que la suite des sommes restant à rembourser soit décroissante est donc

$$m_0 = tM$$

2) On suppose que $m > m_0$.
La suite des sommes restant à rembourser est une suite arithmético-géométrique, donc

$$\forall n, S_n = \lambda(1+t)^n + c \qquad \text{où} \;\; c = \frac{m}{t}$$

Donc $\forall n, S_n = \lambda(1+t)^n + \frac{m}{t}$ et comme de plus $S_0 = M$, on a :
$\lambda = M - \frac{m}{t}$.
Donc $\forall n, S_n = \left(M - \frac{m}{t}\right)(1+t)^n + \frac{m}{t}$.
L'emprunt est terminé dès que la somme restant à rembourser est négative ou nulle : la durée de l'emprunt est donc N mois où
$\left(M - \frac{m}{t}\right)(1+t)^N + \frac{m}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow N = \left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{m}{t}\right) - \ln\left(\frac{m}{t} - M\right)}{\ln(1+t)} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ est le plus entier supérieur ou égal à x.

3) ***Application numérique*** : on suppose que $M = 100000€$, $t = 0,3\% = \dfrac{3}{1000}$ et $m = 2m_0$.
$m_0 = 300€$ donc $m = 600€$.
$N = 232$ mois.
Au bout de 231 mois, la somme restant à payer est $S_{231} = 236,78€$.
La dernière mensualité est donc de $236,78 \times 1,003 = 237€49$ centimes.

Ex. 20 (Cor.) Soit u définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2) Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Cor. 20 :

1) Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ puisque
   $u_1 = 1 > 0$ (pour $n = 1$)
   et $\forall n \geqslant 2, u_n = \frac{1}{n-1} e^{-u_{n-1}} > 0$.
2) En utilisant le résultat de la question précédente,
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, -u_n < 0$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} e^{-u_n} < \frac{1}{n}$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}$.
   Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite u converge vers 0.