# Équations différentielles, développements limités, espaces vectoriels

**Exercice 1.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : autrement dit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Soit $F$ le sous-ensemble des fonctions de $E$ qui sont paires.
Soit $G$ le sous-ensemble des fonctions de $E$ qui sont impaires.

1) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2) Montrer que la seule fonction de $E$ à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
3) Montrer par analyse/synthèse que quelle que soit la fonction $f \in E$, il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
4) Déduire des deux questions précédentes que $E = F \oplus G$.
5) Applications numériques : expliciter les fonctions $P_f$ et $I_f$ de la question 3) pour
   a) $f = \exp$ ;
   b) $f = x \mapsto e^{ix}$ ;
   c) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$ ;
   d) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

**Exercice 2.**

***PARTIE A***

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$ et on recherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies et $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = ]-1;1[$.

1) Montrer que si $x \mapsto y(x)$ est solution de $(E)$ sur $I$ alors $t \mapsto z(t) = y(\sin t)$ est solution de $(E')$ : $\cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$ sur $J = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que si $t \mapsto z(t)$ est solution de $(E')$ sur $J$ alors $t \mapsto \phi(t) = \cos(t)z(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficient constant que l'on résoudra.
3) Montrer que $\forall x \in ]-1;1[, \cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$.
4) Déduire des questions précédentes que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(E)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{a + b\ \text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

***PARTIE B***

On considère une fonction $f$ solution de $(E)$.

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1;1[, \mathbb{R})$.
   [Indication : on montrera que si $f \in \mathcal{C}^n$ alors $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ en utilisant $(E)$ puis...]

2) Montrer que $f$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Conformément au résultat de la question précédente, on pose $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

   Expliciter le lien entre $a_i$ et $f^{(i)}(0)$.

4) En utilisant l'équation différentielle $(E)$ satisfaite par $f$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

5) En déduire une relation de récurrence entre $f^{(n)}(0)$ et $f^{(n+2)}(0)$, puis une relation de récurrence entre $a_n$ et $a_{n+2}$.

6) Exprimer $a_{2p+1}$ et $a_{2p}$ en fonction de $a_0$, $a_1$ et $p$.

***PARTIE C***

En utilisant les deux parties précédentes, donner :

- le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.