Maths - Chapitre 12

Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K},+,\times)$ désignera le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

I. Structure d'espace vectoriel

I.1. Introduction et premiers exemples

- Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est appelée ***base du plan vectoriel***, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ sont appelées ***coordonnées*** du vecteur $\vec{u}$ ***dans la base*** $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
- Toute solution y d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $y=\lambda y_1+\mu y_2$ de deux solutions non colinéaires y_1 et y_2 de cette équation différentielle : $(y_1;y_2)$ est appelée ***base de l'espace des solutions***, $(\lambda;\mu)\in\mathbb{K}^2$ sont appelées ***coordonnées*** de la solution y ***dans la base*** $(y_1;y_2)$.
- Tout nombre complexe z peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $z=x\times 1+y\times i$ des nombres 1 et i : ....
- Toute suite récurrente linéaire u d'ordre 2 peut s'écrire comme ....
....
....
....
- Tout couple $(c;d)\in\mathbb{K}^2$ peut s'écrire comme ....
....
....
....

Les exemples précédents illustrent le fait que les notions de ***combinaisons linéaires***, de ***bases*** ou encore de ***coordonnées*** se retrouvent dans des domaines très variés des mathématiques, dont certains n'ont à priori aucun rapport immédiat avec la géométrie.
Ce qui importe en fait, ***ce sont les opérations que l'on peut faire sur les objets concernés dans ces exemples*** : on peut les ajouter entre eux, ou les multiplier par un scalaire (c'est-à-dire un nombre réel ou complexe), ce sont des éléments de plusieurs ***espaces vectoriels***.

Par ailleurs, tous ces exemples concernent des espaces vectoriels ***de dimension 2*** : pour définir un vecteur dans ces espaces, il suffit de donner ***deux scalaires, appelés coordonnées de ce vecteur***. Cette notion de dimension est utilisée dans d'autres domaines que les mathématiques, parfois avec une autre terminologie : en SI par exemple, on parle plutôt de ***degrés de liberté***.
Il existe évidemment des espaces vectoriels de dimension 1, ou 3, ou plus, voire de dimension infinie !

I.2. Définition et premiers exemples

Définition 12.1

On dit que $(E, +, .)$ est un ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ ou encore un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** si :

- E est muni d'une loi ***interne*** notée additivement $(+)$ qui lui confère une structure de ***groupe commutatif*** : $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$, la loi est ...., possède .... noté 0_E (ou plus simplement 0) et tout élément $x \in E$ possède .... noté $-x$.
- E est muni d'une loi externe $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda.x \in E$. Plus précisément, cette loi vérifie :
  - ⋆ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
  - ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;
  - ⋆ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x)$;
  - ⋆ $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}}.x = x$.

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** et ceux de $\mathbb{K}$ ***scalaires***.

Notation

Les éléments de $x \in E$ sont parfois surmontés d'une flèche $(\vec{x})$ pour les distinguer des scalaires, mais ce n'est pas une obligation. Cette notation est essentiellement utilisée pour les vecteurs du plan et de l'espace ordinaires.
Le signe . de la loi externe de E est souvent omis.

Ex. 12.1

- $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
  $\mathbb{C}$ s'identifie alors ....
- $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par ....
  et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors ....
- De même, $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par .... et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors ....
- D'une manière générale, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par .... et sa loi externe par ....

Ex. 12.2

- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni des lois :
  - ⋆ $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} =$ ....
  - ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} =$ ....

  est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  De même, l'ensemble $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ des suites complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
- D'une manière générale, soit A un ensemble quelconque et $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{F}(A, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^A$ des lois :

⋆ $\forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K}), \forall g \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, on définit par $f+g$ l'application : $\left\{\begin{array}{lll} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$

⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, on définit par $\lambda.f$ l'application : $\left\{\begin{array}{lll} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$

Muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet ....
....
....
....
....

De même, si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $(\mathcal{F}(A,E),+,.)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 12.2

Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E$:

- $0.x = 0_E$: $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x \Rightarrow 0.x = 0_E$
- $\lambda.0_E = 0_E$: $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E \Rightarrow \lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ **ou** $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $(\lambda^{-1}\lambda).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x = 0_E$

Ex. 12.3 Montrer que la commutativité de la loi + est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Cor. 12.3

Ex. 12.4 $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, xy = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Cor. 12.4

I.3. Combinaisons linéaires

Définition 12.3 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on dit que u est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** U ou une ***combinaison linéaire de*** U si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

II. Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II.1. Définition

Définition 12.4

Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si :

- $0_E \in F$;
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda.x + \mu.y \in F$: F est dit ***stable par combinaisons linéaires***.

Remarque

$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.

II.2. Théorème fondamental

Théorème 12.5

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble (muni de lois...) est un espace vectoriel, on montrera souvent qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Ex. 12.5

- Montrer que l'ensemble $F = \{(x; x), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

  ....
  ....
  ....

- Montrer que pour une fonction $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

  ....
  ....

- Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (d'ordre quelconque) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$.

  ....
  ....
  ....
  ....

- Montrer que l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

  ....
  ....
  ....
  ....

II.3. Sous-espace vectoriel engendré

Proposition 12.6

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, ***l'ensemble des combinaisons linéaires de*** U est un sous-espace vectoriel de E appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** U.
On le note $\operatorname{Vect} U$.

Démonstration

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut tenter de l'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une famille.

Ex. 12.6
- L'ensemble $F = \{(x; x), x \in \mathbb{R}\} =$ .... est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par ....
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Vect}((0; 0; 1); (0; 1; 0))$ est l'ensemble des vecteurs de la forme ....
- Pour une fonction a continue sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ engendré par ....
- Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
  L'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par ....
  ....

II.4. Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 12.7

L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.7 Donner toutes les suites u vérifiant ***à la fois*** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Donner toutes les suites suites v vérifiant ***à la fois*** $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.

Cor. 12.7

II.5. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 12.8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle ***somme de*** F ***et de*** G l'ensemble $H = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.

Notation

La somme H des sous-espaces vectoriels F et G est notée $H = F + G$.

Théorème 12.9

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.8 On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites géométriques de raison 2 et $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites constantes.
Montrer que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ et que $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Cor. 12.8

II.6. Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 12.10

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on dit que la somme $F + G$ est ***directe*** si

$$\forall z \in F + G, \exists! x \in F, \exists! y \in G, z = x + y$$

Notation

Si la somme $F + G$ est directe, on note $F \oplus G$ la somme des sous-espaces vectoriels F et G de E.

Proposition 12.11

La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration

II.7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 12.12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires dans*** E si $F \oplus G = E$, autrement dit si

$$\begin{cases} F + G &= E \\ F \cap G &= \{0_E\} \end{cases}$$

Ex. 12.9 Montrer que $\text{Vect}((1;1))$ et $\text{Vect}((1;-1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il en est de même de $\text{Vect}((1;1))$ et $\text{Vect}((-3;-2))$.

Cor. 12.9

Remarque

Cet exemple montre qu'un sous-espace vectoriel F ***admet plusieurs sous-espaces supplémentaires*** G dans E. ***En conséquence, on ne peut jamais dire que*** G ***est*** ~~***le supplémentaire de*** F~~***, mais seulement qu'il est un supplémentaire de*** $\boldsymbol{F}$!

Remarque

D'après la définition de la somme directe, si F et G sont supplémentaires dans E, ***tout vecteur de*** E ***se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

III. Applications linéaires

Étant donné un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ (pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on se donne $(E, +, .)$, $(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

III.1. Définition

Définition 12.13

Soit f une application de E dans F. On dit que f est une ***application linéaire*** ou un ***morphisme d'espaces vectoriels*** si

$$\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u;v) \in E^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Corollaire 12.14

$f(0_E) = 0_F$.

Démonstration

On prend $(\lambda;\mu) =$. . . . . *dans la définition précédente.*

Notation

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Définition 12.15

- Les applications de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés ***endomorphismes*** de E.
- Les applications ***bijectives*** de $\mathcal{L}(E,F)$ sont appelées ***isomorphismes*** et les bijections de $\mathcal{L}(E)$ sont appelées ***automorphismes***.
- On appelle ***forme linéaire*** de E toute application de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Notation

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$. Il s'agit de l'abréviation de ***Groupe Linéaire***.

Ex. 12.10 $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est une application linéaire.

Cor. 12.10

III.2. Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 12.16

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition d'applications et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Démonstration

III.3. Composition

Proposition 12.17

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration

Remarque

Notamment, la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme, la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme et la composée de deux automorphismes est un automorphisme.

III.4. Réciproque d'une application linéaire bijective

Proposition 12.18

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Démonstration

Remarque

Notamment, ***dans le cas de*** $\mathcal{GL}(E)$ la loi $\circ$ est une loi de composition interne qui confère à $(GL(E), \circ)$ une structure de groupe : la composée de deux automorphismes est un automorphisme, l'identité est l'élément neutre de la composition et tout automorphisme possède un symétrique pour la composition qui est sa bijection réciproque.

III.5. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 12.19

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :

- le ***noyau*** de f noté $\operatorname{Ker} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Ker} f = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$;
- l'***image*** de f notée $\operatorname{Im} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$.

Autrement dit,
le noyau de f est l'image réciproque par f du vecteur nul de F (c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de 0_F)
l'image de f est l'ensemble des ***vecteurs de*** F ***ayant un antécédent par*** f ***dans*** E c'est-à-dire l'image directe de E par f.

III.6. Propriétés de l'image et du noyau

Théorème 12.20

Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on a :

1) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
2) en particulier, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F ;
3) f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$;
4) f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Démonstration

Ex. 12.11 Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans le précédent exemple est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Cor. 12.11

IV. Applications linéaires particulières

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

IV.1. Rappel

Par définition (voir définition 12.10), tout vecteur de $E = F \oplus G$ se décompose ***de manière unique en la somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

IV.2. Les homothéties

Définition 12.21

On appelle homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$

Propriété 12.22

- $\forall x \in E$, $h_1(x) = x$ (h_1 est l'identité) et $h_0(x) = 0$ (h_0 est l'application nulle) ;
- si $\lambda \neq 0$, $h_\lambda \in \mathcal{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.

IV.3. Les projections

Définition 12.23

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array} \right.$

Propriété 12.24

- $\forall x_1 \in F, p(x_1) = x_1$ et $\forall x_2 \in G, p(x_2) = 0$;
- $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = F = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p)$ et $\operatorname{Ker} p = G$;

Démonstration

Proposition 12.25 (Caractérisation des projections)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$ (on note aussi $f^2 = f$).

Démonstration

Ex. 12.12 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & \left(\dfrac{x-2y}{3}; \dfrac{2y-x}{3}\right) \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f est une projection.
3) Donner ses sous-espaces caractéristiques (c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels F et G).

Cor. 12.12

IV.4. Les symétries

Définition 12.26

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s : $\left\{ \begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$

Propriété 12.27

- Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $s = 2p - \mathrm{Id}$ et $p = \frac{s+\mathrm{Id}}{2}$
- $s \in \mathcal{GL}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$

Démonstration

Proposition 12.28 (Caractérisation des symétries)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$ (on note aussi $f^2 = \mathrm{Id}$).

Démonstration

Ex. 12.13 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (2x+y; -3x-2y) \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f est une symétrie.
3) Donner ses sous-espaces caractéristiques (c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels F et G).

Cor. 12.13

V. Compléments/exemples

Écriture sous forme de sous-espace vectoriel engendré d'un sous-espace défini par une ou plusieurs équations

Ex. 12.14 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1;-1;1);(2;1;0))$ et $G = \{(x;y;z) \in E, x+y+z=0\}$.

1) Écrire G comme espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs à préciser.
2) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E de deux manières différentes :
   a) en utilisant le résultat de la question précédente ;
   b) en écrivant G comme le noyau d'une application linéaire à préciser.
3) Décrire précisément les vecteurs de $F \cap G$.
4) Donner un vecteur de F qui n'appartient pas à G et un vecteur de G qui n'appartient pas à F.

Cor. 12.14

Obtention d'une équation ou d'un système d'équations caractérisant un sous-espace vectoriel engendré

Ex. 12.15 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de E.
Soit $F = \text{Vect}(A;B;C)$ et $G = \text{Vect}(A;C)$.
Donner un système d'équations caractérisant F.
Donner un système d'équations caractérisant G.

Cor. 12.15