Maths - Feuille d'exos n° 11

Développements limités

I. Développements limités : calcul

Ex. 11.1 Donner le développement limité à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 1 ;
2. $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$;
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $\dfrac{1}{2}$.

Ex. 11.2 DL en 0 des expressions suivantes :

1. $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
3. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 7
4. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4
5. $\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2
6. $\mathrm{Arccos}(x)$ à l'ordre 5
7. $e^{\cos x}$ à l'ordre 4
8. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ à l'ordre 3

Ex. 11.3 (Cor.)

1. Donner un DL en 0 à un ordre quelconque des fonctions suivantes :

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{2}{1-x} - 1$

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{x+1}{1-x}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$

$x \in]-\infty;1[\mapsto -\ln(1-x)$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Ex. 11.4 [**] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Vérifier que f possède un $\mathrm{DL}_2(0)$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Ex. 11.5 [*] Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on note x_n.
Déterminer un équivalent u_n de x_n puis un équivalent de $x_n - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Ex. 11.6 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

II. Développements limités : utilisation

Ex. 11.7 Soit f définie sur $]-\pi;\pi[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

1. Déterminer un $DL_3(0)$ de f.
2. En déduire que f peut être prolongée en 0 en une fonction dérivable.
On note g ce prolongement.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Ex. 11.8 ***CCP MP 2019 - n°1***

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex. 11.9 ***D'après CCP MP 2019 - n°46*** On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. Donner la limite, puis un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Ex. 11.10

1. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Exprimer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ en fonction de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
3. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où on explicitera a et b.

Ex. 11.11 Asymptote et position par rapport à la courbe en $+\infty$

1. $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ en $\pm\infty$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
4. $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(1+\frac{2}{x}\right)$

Méthode : Recollement de solutions d'une EDL1

Lorsqu'une équation différentielle linéaire à l'ordre 1 est de la forme $u(t)y' + v(t)y = w(t)$, on commence par la diviser par $u(t)$ sur des intervalles où $u(t)$ ne s'annule pas pour obtenir une EDL1 de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.
Une fois cette équation résolue (avec des constantes différentes sur chaque intervalle où $u(t)$ ne s'annule pas), on cherche à savoir si les solutions peuvent être ***recollées*** aux points où $u(t)$ s'annule pour obtenir des fonctions dérivables (donc continues).
Pour effectuer ce recollement, on utilise les développements limités grâce à la proposition 11.15 du cours sur les développements limités.

Ex. 11.12 [$*$] Trouver l'ensemble des fonctions $f :]-\infty; 1[\to \mathbb{R}$ vérifiant
$\forall t \in]-\infty; 1[, t(t-1)f'(t) - (t-2)f(t) = 0$.

Ex. 11.13 [$*$]

1. Donner les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$.
2. Même question pour $x(1-x)y' + y = x - 1$.

Corrections

Cor. 11.3 : Exemple de calcul de la première limite :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

Remarque importante : ici, par définition, $\epsilon(x) = \underset{x\to 0}{o}(1)$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\epsilon(x)}{1} = 0$.
À retenir : $\underset{x\to 0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque x tend vers 0***.
D'une manière générale, $\underset{x\to x_0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque x tend vers x_0***.
Autrement dit, une fonction est négligeable devant 1 lorsqu'elle tend vers 0 (au voisinage d'un point).

Retour au calcul de limite :
$\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.