Maths - Feuille d'exos n° 12

Espaces vectoriels

I. Définition, sous-espaces vectoriels

Ex. 12.1 (Cor.) On considère $F = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Ex. 12.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

1) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ 2) $\left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$
3) $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$ 4) $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
5) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$

Ex. 12.3

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^3$ et on définit
   $F = \mathrm{Vect}\,((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \mathrm{Vect}\,((0; 1; 1))$.
   - Déterminer $F \cap G$.
   - Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On se place sur $E_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit
   $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et
   $G_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
   - Déterminer $F_2 \cap G_2$.
   - Montrer que $E_2 = F_2 \oplus G_2$.

Ex. 12.4 Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le sous-espace vectoriel de E défini par
$H = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ (voir exercice 12.2).
Trouver un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ex. 12.5 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que $E = F' \oplus G$.

Ex. 12.6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que A et B sont supplémentaires dans E et $A \subset C$.
Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Ex. 12.7 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 12.8

1. Montrer que $\mathrm{Vect}\,((1; 2))$ et $\mathrm{Vect}\,((3; 4))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(X)$ et $\mathrm{Vect}\,(1 + X^2; X - 3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

II. Applications linéaires

Ex. 12.9

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?
   $f : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x - 2y + 3z \in \mathbb{R}$
   $g : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y; 1) \in \mathbb{R}^2$
   $h : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; x + y) \in \mathbb{R}^2$
2. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires précédentes.

Ex. 12.10 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

(1) $f \mapsto f(0)$ (2) $f \mapsto f(1) - 1$ (3) $f \mapsto f''(3)$
(4) $f \mapsto (f'(2))^2$ (5) $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 12.11 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0);P(1)) \end{array} \right.$.
Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 12.12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P \mapsto P - P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\phi^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{\deg Q} Q^{(k)}$.

Ex. 12.13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et
$\Phi : \left\{ \begin{array}{lll} E \times E & \to & E \times E \\ (x;y) & \mapsto & (x+y; x+f(x+y)) \end{array} \right.$.
Montrer que Φ est un automorphisme de $E \times E$.

Ex. 12.14

1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
   Montrer qu'il existe $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
   $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x;y) = (ax+by; cx+dy)$.
2. Donner des énoncés similaires pour
   - $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$;
   - $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$;
   - $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ex. 12.15 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u : E \to G$, $v : F \to G$ linéaires tels que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.

1. Montrer que si v est injective alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.
2. Montrer que si il existe un sous-espace vectoriel A de F tel que $\operatorname{Ker} v \oplus A = F$, alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.

Ex. 12.16 (Cor.) E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.

III. Applications linéaires particulières

Ex. 12.17 Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x-2y;-y) \end{array} \right.$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.
Préciser alors les espaces F et G tels que s soit la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.18 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$.
$F = \operatorname{Vect}((1;0;1);(1;1;0))$ et $G = \operatorname{Vect}((0;1;1))$ de sorte à ce que $E = F \oplus G$ (cf. exercice 12.3).
Déterminer l'expression de la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.19 Donner l'expression de la projection sur $\operatorname{Vect}\big((-1;1)\big)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}\big((2;1)\big)$.

Ex. 12.20 Déterminer la nature des applications linéaires suivantes :

1. $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x; y-2x) \in \mathbb{R}^2$
2. $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{x-y}{2}; \frac{y-x}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

Ex. 12.21 Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $f : M \in E \mapsto M^{\mathrm{T}} \in E$ et $g : M \in E \mapsto \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.
2. Donner la nature géométrique de f et g.
   On précisera notamment les sous-espaces caractéristiques des deux applications.

Ex. 12.22 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition de E associée (voir exercice 12.16...).

Ex. 12.23 (Cor.) Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Montrer qu'on a alors $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Corrections

Cor. 12.1 : En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F = \mathrm{Vect}(1+i)$ est donc un sous-espace vectoriel donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).
En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, le vecteur $1+i$ par exemple est un vecteur de F mais $i(1+i) = -1+i \notin F$: donc F n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Cor. 12.5 : F' est le supplémentaire de $F\cap G$ (qui est un s.e.v. de $(E,+,.)$) dans F. Donc $F = F' \oplus (F\cap G)$.
Nous devons démontrer que $F'\cap G = \{0\}$ et $F'+G = E$.

- Soit $x \in F'\cap G$. $x\in F' \Rightarrow x \in F$ et $x\in G \Rightarrow x\in F\cap G$. Donc $x\in F'$ et $x \in (F\cap G)$ donc $x = 0$.
  Donc $F'\cap G = \{0\}$.
- Soit $x\in E$. $E = F+G$ donc $\exists (u,v)\in F\times G$, $x = u+v$.
  $u\in F$ et $F = F'\oplus(F\cap G)$ donc $\exists(u_1,u_2)\in F'\times(F\cap G)$ tels que $u = u_1+u_2$.
  Donc $x = u_1+u_2+v$ avec $u_1\in F'$ et $u_2+v\in G$ (car G est un e.v.).
  Donc $E = F'+G$.

Finalement on a démontré que $E = F'\oplus G$.

Cor. 12.7 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F\subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u\in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y)\in G$ tels que $u = xe_1 + ye_2$. Cherchons donc $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1) = x(3;2;2)+y(0;1;1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda+\mu & = & 3x\\ \mu & = & 2x+y\\ \mu & = & 2x+y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\lambda+\mu}{3}\\ y & = & \dfrac{\mu-2\lambda}{3}\end{array}\right.$$

  Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F\subset G$.
- $G\subset F$: soit $e = xe_1+ye_2\in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1+\mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1) = x(3;2;2)+y(0;1;1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda+\mu & = & 3x\\ \mu & = & 2x+y\\ \mu & = & 2x+y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda & = & x-y\\ \mu & = & 2x+y\end{array}\right.$$

  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G\subset F$.
  Comme $F\subset G$ et $G\subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 12.16 : Nous devons démontrer que $\mathrm{Ker}\,v\cap\mathrm{Im}\,u = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}\,v+\mathrm{Im}\,u = F$.

- Soit $y\in\mathrm{Ker}\,v\cap\mathrm{Im}\,u$. $y\in\mathrm{Ker}\,v$ donc $v(y) = 0$. Or $y\in\mathrm{Im}\,u$, donc $\exists x\in E, y = u(x)$.
  On a alors, $v\circ u(x) = v(y) = 0 = x$ car $v\circ u = \mathrm{Id}_E$. Donc $y = u(0) = 0$.
  On a démontré que $\mathrm{Ker}\,v\cap\mathrm{Im}\,u = \{0\}$.
- Soit $y\in F$. Soit $y_1 = u(v(y)) = u\circ v(y)$.
  ATTENTION : on sait que $v\circ u = \mathrm{Id}_E$ mais on ne sait rien sur $u\circ v$. En particulier, il est tout à fait possible que $y_1\neq y$.
  Posons de plus, $y_2 = y-y_1$ de sorte à ce que $y = y_1+y_2$.
  Par définition, $y_1 = u(v(y))\in\mathrm{Im}\,u$. De plus, comme $v\circ u = \mathrm{Id}_E$
  $v(y_2) = v(y-y_1) = v(y)-v(y_1) = v(y)-v\circ u\circ v(y) = v(y)-v(y) = 0$
  Donc $y_2\in\mathrm{Ker}\,v$.
  On a démontré que $\mathrm{Ker}\,v+\mathrm{Im}\,u = F$.

Finalement, $F = \mathrm{Ker}\,v\oplus\mathrm{Im}\,u$.

Cor. 12.23 :

1. $p+q$ est un projecteur si et seulement si $(p+q)\circ(p+q) = p+q$.
   Or $(p+q)\circ(p+q) = p\circ p+p\circ q+q\circ p+q\circ q = p+q+p\circ q+q\circ p$.
   Donc $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = -q\circ p$.
   Sens direct : on compose à gauche par p :
   $p\circ q = -q\circ p \Rightarrow p\circ p\circ q = p\circ q = -p\circ q\circ p = -(-q\circ p)\circ p = q\circ p$.
   Or $p\circ q = -q\circ p = q\circ p \Rightarrow q\circ p = 0 = p\circ q$.
   Réciproquement : $p\circ q = q\circ p = 0 \Rightarrow p\circ q = 0 = -0 = -q\circ p$.
   On a donc bien $p+q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Soit $x\in\mathrm{Ker}(p+q)$. Alors $p(x)+q(x) = 0$ donc $p(x) = -q(x)$. On compose par p :
   $p\circ p(x) = p(x) = -p\circ q(x) = 0$. Donc $x\in\mathrm{Ker}\,p$.
   De même en composant par q :
   $q\circ p(x) = 0 = -q\circ q(x) = -q(x)$. Donc $x\in\mathrm{Ker}\,q$.
   Donc $x\in\mathrm{Ker}(p+q)\Rightarrow x\in\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$.
   Réciproquement, de façon évidente, si $x\in\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$, alors $(p+q)(x) = p(x)+q(x) = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$.