ENAC 2023 - sous réserve que je n'aie fait aucune erreur moi-même

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

2 février 2026

1) Pour prouver que $A \Rightarrow B$ on ***suppose que A est vrai, et on prouve alors que B l'est aussi.***
Pour prouver que A **ou** B est vrai, on ***suppose que A est faux, et on prouve alors que B est vrai.*** En effet, ou bien A est vrai et dans ce cas A **ou** B l'est aussi, ou bien A est faux, et pour prouver que A **ou** B est vrai, il faut prouver que B est vrai.
Autrement dit, $A \Rightarrow B$ équivaut à (**non** A) **ou** B puisque ces deux propositions se démontrent de manière identique.
Appliqué à cette question, cela donne :
La réponse A est correcte : la négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est la négation de $\neg(\exists x \in E, A(x)) \vee (\forall x \in E, A(x))$ c'est-à-dire l'assertion
$(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$.
La réponse B est donc fausse.
La réponse C est fausse car la négation de $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant N$ est
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N$.
La réponse D est fausse aussi. Il n'y a pas de moyen simple de traduire la négation du quantificateur $\exists!$.

Une seule bonne réponse : A.

2) La réponse A est manifestement fausse : $x + y^2 = 1$ n'est pas vraie pour tout couple $(x; y)$ de réels.
La réponse B est fausse aussi : pour $x = 2$, il n'existe pas de y tel que $2 + y^2 = 1$.
La réponse C est fausse aussi : il n'existe pas de réel x pour lequel, pour tout réel y, $x + y^2 = 1$.
La réponse D est bonne ! Il existe un réel x et un réel y pour lesquels $x+y^2 = 1$, par exemple $x = 1$, $y = 0$.

Une seule bonne réponse : D.

3) Important : la fonction f donnée est supposée continue. Nous allons le voir, cette question fait référence au théorème des valeurs intermédiaires.
L'assertion P : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ signifie que la fonction f ***est nulle***.
L'assertion Q : $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ signifie que la fonction f ***s'annule*** (au moins une fois sur $\mathbb{R}$).
L'assertion R : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \vee \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ signifie que la fonction f ***est ou bien strictement positive sur*** $\mathbb{R}$***, ou bien strictement négative sur*** $\mathbb{R}$.
La réponse A est donc juste : $\neg R \Rightarrow Q$ puisque f est continue.
La réponse B est aussi juste : $\neg Q$ signifie que f ne s'annule jamais, donc qu'elle n'est pas la fonction nulle.
Inutile de regarder les deux autres réponses, puisqu'il y a au plus deux réponses valides.

Deux bonnes réponses : A et B.

4) La réponse A est juste : lorsqu'on restreint au départ une fonction f injective, la fonction g obtenue reste injective puisque les éléments de son ensemble d'arrivée ont ou bien le même antécédent que par f, ou bien n'ont pas d'antécédent soit parce qu'ils n'en avaient pas par f, soit parce qu'ils en avaient un par f qui a été exclu de l'ensemble de départ.
La réponse B est fausse : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est surjective mais sa restriction au départ à $\mathbb{R}_+$ n'est plus surjective puisque $\exp(\mathbb{R}_+) = [1; +\infty[$.
La réponse C est fausse : si on prolonge au départ une fonction f injective définie sur $[1; +\infty[$ en posant $f(0) = f(1)$, le prolongement obtenu n'est clairement pas injectif.
La réponse D est juste : une fonction surjective est une fonction dont tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont atteints. En la prolongeant au départ, on rajoute des antécédents à certains éléments de l'ensemble d'arrivée, ce qui ne modifie pas le caractère surjectif.

Deux bonnes réponses : A et D.

5) f est l'application identité qui est clairement bijective : réponse A juste.
$g(0) = g(1) = 0$ par définition : la réponse B est fausse.
$f \circ g = g \circ f = g$ puisque f est l'application identité : les réponses C et D sont fausses.

Une seule réponse juste : A.

6) Arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.
Pour que f soit définie et dérivable il faut donc que $x - 1 > 0$, c'est-à-dire que $x > 1$ d'une part,
et que $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} < 1$ d'autre part, c'est-à-dire que $0 < x^2 - 4x + 4$
ou encore que $0 < (x-2)^2$, ce qui est vrai pour tout $x \neq 2$.
La fonction f est donc dérivable sur $]1; 2[\cup]2; +\infty[$.

Une seule réponse juste : C.

7) La réponse A est fausse car pour $a = b = 1$, le système équivaut à la seule équation $x + y + z = 1$ qui possède une infinité de solutions.
La réponse B est fausse elle aussi car pour $b = 0$, le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & 0 & + & z & = & 1 \\ x & + & 0 & + & z & = & 0 \\ x & + & 0 & + & az & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (1-a)z & = & 1 \\ x & = & -z \\ (a-1)z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (1-a)z & = & 1 \\ x & = & -z \\ 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

qui n'a aucune solution.

Pour les deux autres questions, le mieux est de résoudre le système donné :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)\,z & = & 1-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b\,(2-a-a^2)\,y & & & = & 2-b-ab \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc pour $a = b = -2$, il y a une infinité de solutions : réponse C vraie.

Et pour $a \neq -2$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on a $b\,(2-a-a^2) \neq 0$ et le système possède une unique solution : réponse D fausse.

Une seule bonne réponse : C.

8) $\dfrac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z\left(1+e^{i\theta}\right) = i\left(1-e^{i\theta}\right) \Leftrightarrow 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}z = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}i$
$\Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Une seule bonne réponse : C.

9) Développement de $\sin(n\theta)$ en utilisant de plus $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$:

Une seule bonne réponse : D.

10) La résolution de l'équation différentielle donne $y = \lambda x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les solutions données ne sont pas dérivables en 0, donc ne sont pas solutions sur $[0;+\infty[$.

Une seule bonne réponse : B.

11) On calcule les deux intégrales :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln(2) - \int_0^1 2-\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$. Les réponses A et B sont toutes les deux fausses.

Puis, pour la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable $u = e^x$:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{u+1-1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u = \int_1^2 \sqrt{1+u} - \frac{1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Une seule bonne réponse : D.

12) Ici, la bonne réponse est C, unique solution $x = 2$, mais trop pénible à démontrer.

13) On pose $f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$ donc $f'(1) = n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(k^2 - k\right) x^{k-2}$ donc $f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - k\right) \binom{n}{k}$.

En sommant on obtient donc

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}$.

Une seule bonne réponse : D.

14) On calcule la somme :

$S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i^2 + j^2 + 2ij) = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij.$

Donc $S_n = 2n\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2(n+1)(4n+2+3n+3)}{6} = \dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

Une seule bonne réponse : C.

15) Dans $\mathbb{R}^* \backslash \{-1\}$, l'équation $\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x+1|} = 1$ équivaut à $|x(x+1)| = |x| + |x+1|$.

On étudie les solutions en faisant une étude de cas : pour $x > 0$, pour $-1 < x < 0$ et pour $x < -1$.

Dans le premier cas, on obtient deux solutions, mais une seule est positive : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans le second cas, pas de solution réelle.

Enfin dans le troisième, deux solutions dont une seule est inférieure à -1 : $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Une seule bonne réponse : C.

16) PGCD$(x;y) = 5$ donc x et y sont divisibles par 5.

PPCM$(x;y) = 5 \times 12 = 5 \times 2^2 \times 3$ donc x ou y est divisible par 2^2 (mais pas les deux, sans quoi le PGCD serait aussi divisible par 2^2) et x ou y est divisible par 3 (mais pas les deux).

Donc les couples solutions sont $\{(60;5);(20;15);(15;20);(5;60)\}$.

Une seule bonne réponse : B.

17) La formule de récurrence pour les suites s'écrit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Notons A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = 3I_3 + N$.

Les matrices I_3 et N commutent de sorte que

$A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k$. Or $N^3 = 0_3$.

Donc $A^n = 3^n I_3 + n3^{n-1}N + \dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 2 \times 3^n + 7n3^{n-1} \\ 7 \times 3^n \end{pmatrix}$.

Une seule bonne réponse : A.

18)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Pour obtenir le rang d'une matrice on effectue l'algorithme du pivot sur les ***lignes et les colonnes***.

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-2 & 1 \\ m & 1-2m & 2-m \end{pmatrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & 1 \\ 0 & 1-2m & 2-m \end{pmatrix} \\ &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2m+(m-2)^2 & 2-m \end{pmatrix} \\ &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & m^2-6m+5 \end{pmatrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & m^2-6m+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice est donc de rang 2 si $m^2-6m+5=0$ c'est-à-dire si $m=1$ ou si $m=5$, et est de rang 3 sinon.

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

19)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Réponse A : les deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, la famille est donc libre, la réponse A est juste.

Réponse B : la matrice donnant x_1, x_2, x_2 dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut 1, la famille est donc libre. La réponse B est juste.
Inutile d'envisager les réponses C et D, puisqu'il y a au plus deux réponses justes.

Deux bonnes réponses : A et B.

20)
$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+3z=0\} = \{(-y-3z, y, z, t), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((-1;1;0;0);(-3;0;1;0);(0;0;0;1)\right) \end{aligned}$$

La réponse A est donc fausse car G est inclus dans F.
En revanche les réponses B et C sont bonnes et il est inutile de considérer la réponse D car il y a au plus 2 bonnes réponses.

Deux bonnes réponses : B et C.

21)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Réponse A : fausse puisque, d'après le cours, pour un projecteur p quelconque sur F parallèlement à G, d'une part $E = F \oplus G$, et d'autre part $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
Réponse B : fausse puisque, en supposant que p est un projecteur,
$(2p) \circ (2p) = 4p \circ p = 4p \neq 2p$ pour un projecteur p non nul.
Donc $2p$ n'est pas un projecteur.
Réponse C : vraie. C'est du cours. Pour un projecteur p quelconque sur F parallèlement à G, $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
Réponse D : faux.
$(2\mathrm{id} - p) \circ (2\mathrm{id} - p) = 4\mathrm{id} - 2p - 2p + p^2 = 4\mathrm{id} - 3p \neq 2\mathrm{id} - p$ pour p différent de l'identité.

Une seule bonne réponse : C.

22)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Remarquons d'abord que
$H = \{(x;y;z), x+y+z=0\} = \{(-y-z;y;z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ donc
$H = \mathrm{Vect}\left((-1;1;0);(-1;0;1)\right)$. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$.
Cherchons $u \in H$ et $v \in L$ tels que $(x;y;z) = u + v$.
On a donc :
$(x;y;z) = (-a-b;a;b) + (c;2c;3c) = (c-a-b;2c+a;3c+b)$.
Le système conduit à $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \dfrac{-x+2y-z}{3} \\ b & = & \dfrac{-x-y+z}{2} \\ c & = & \dfrac{x+y+z}{6} \end{array}\right.$
Donc $s(x;y;z) = u - v = (-a-b;a;b) - (c;2c;3c) = (-a-b-c;a-2c;b-3c)$
c'est-à-dire $s(x;y;z) = \left(\dfrac{2x-y-z}{3}; \dfrac{-2x+y-2z}{3}; -x-y\right)$

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

23) On ne demande pas l'inverse de la matrice, ni à cette question, ni aux questions suivantes. Inutile donc de s'embêter avec le bloc droit de l'algorithme du pivot de Gauss : on effectue l'algorithme directement sur la matrice M.

$$
\begin{array}{lll}
M & = & \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1+m & -(1+m) & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1+m & m-m^2 \\ 0 & -1-m^2 & 1+m & -m-m^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - mL_1 \\ L_4 - mL_1 \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1+m & -(1+m) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & -1-m^2 & 1+m & -m-m^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \dfrac{L_3 - L_4}{2} \\ \\ \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -(1+m) & -m-m^2 \\ 0 & 0 & 1+m & -m^2+m^3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \text{ puis} \\ L_3 - (1+m)L_2 \\ L_4 + (1+m^2)L_2 \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -(1+m) & -m-m^2 \\ 0 & 0 & 0 & -m-2m^2+m^3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 + L_3 \end{array}
\end{array}
$$

Pour que la matrice M soit inversible, il faut et il suffit donc que $1 + m \neq 0$ et que $m^3 - 2m^2 - m \neq 0$
c'est-à-dire que $m \neq -1$, $m \neq 0$, $m \neq 1 \pm \sqrt{2}$.

Une seule bonne réponse : B.

24)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Effectuer un tirage de n boules (successivement sans remise) revient à choisir une permutation des numéros de ces boules. Et il y a équiprobabilité de chacun de ces tirages.
Par ailleurs, pour que le tirage soit associé à une rencontre au i-ème tirage, il faut et il suffit que la permutation choisie fasse apparaître le numéro i comme point fixe et permute les $n - 1$ autres numéros.
La probabilité qu'il y ait rencontre au i-ème tirage est donc $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$: la réponse A est juste, la réponse B fausse.
Le nombre moyen de rencontre est difficile à calculer.
Mais on peut facilement le calculer pour $n = 3$ par exemple : les permutations de 123 sont $123; 132; 213; 231; 312; 321$ ce qui conduit à
$N_3 = \dfrac{3+1+1+0+0+1}{6} = 1$
Les réponses C et D sont donc fausses.

Une seule bonne réponse : A.

25)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

$\mathbb{P}(D) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
Pour la réponse A, $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) = \dfrac{1}{13}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$.
$\mathbb{P}(A \cap D) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(D)$ donc les évènements ne sont pas indépendants : la réponse A est fausse.
Pour la réponse B, $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) = \dfrac{1}{13}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{48}{52} = \dfrac{12}{13}$.
$\mathbb{P}(A \cap D) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(D)$ donc les évènements ne sont pas indépendants : la réponse B est fausse.
Pour la réponse C, $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{52}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{52}$.
$\mathbb{P}(A \cap D) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(D)$ donc les évènements ne sont pas indépendants : la réponse C est fausse.
Pour la réponse D, $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(\text{« dame de pique »}) = \dfrac{1}{52}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$.
$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(D)$ donc les évènements sont indépendants : la réponse D est juste.

Une seule bonne réponse : D.

26)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Réponse A : fausse. $F = \text{Vect}(u)^{\perp}$ est de dimension $3-1=2$.
Réponse B : fausse. Notons $a = \dfrac{u}{\|u\|}$.
$d(w,F) = (w|a) = \dfrac{1}{\|u\|}(w|u) = \dfrac{2}{\|u\|}$ est constant, donc ne tend pas vers $+\infty$, y compris si $\|w\|$ tend vers $+\infty$.
Réponse C : vrai, puisque $d(w,F) = \dfrac{2}{\|u\|} = \dfrac{2}{\sqrt{16+1+4}}$.
Réponse D : fausse.

Une seule bonne réponse : C.

27) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \mathcal{I}m\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$. Or, pour $n>1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} &= e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1-\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\
&= e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1-e^{i\pi}}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{\frac{-i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} \\
&= e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{2}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} - 1
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Une seule bonne réponse : D.

28)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

La notation $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ signifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.
On trouve d'abord comme le suggère l'énoncé les réels a, b, c, d tels que

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$$

- Multiplication par $(x+1)^2$ puis on fait tendre x vers -1 : $b=1$.
- Donc $\dfrac{1}{x^2(x+1)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1-x^2}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{1-x}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$
  On multiplie cette dernière relation par $(x+1)$ et on fait tendre x vers -1 : $a=2$.
- Multiplication par x^2 puis on fait tendre x vers 0 : $d=1$.
- Donc $\dfrac{c}{x} = \dfrac{1-x}{x^2(x+1)} - \dfrac{2}{1+x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1-x-2x^2-1-x}{x^2(x+1)} = \dfrac{-2}{x}$.
  Donc $c=-2$.

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+k} - \frac{2}{k} + \frac{1}{(1+k)^2} + \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{2}{1+n} - 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k)^2} + \frac{1}{k^2} \quad \text{par télescopage} \\
&= \frac{2}{1+n} - 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{(chgmt d'indice)}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = -2 + \frac{\pi^2}{6} - 1 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$

Une seule bonne réponse : B.

29) On effectue un DL :

$$\begin{aligned}
\ln(2+\sin(x)) &= \ln\left(2\left(1+\tfrac{\sin(x)}{2}\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{2}\right) \\
&= \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

Une seule bonne réponse : D.

30)

Question hors-programme PCSI.

Il s'agit de faire de l'arithmétique de polynôme ce qui est hors-programme en PCSI.
$2X^3 + X^2 + 2X + 5 = (X^2+1)(2X+1) + 4$
Si un entier divise a et b, il doit donc aussi diviser 4.
La réponse A est donc fausse.
Mais la réponse B est juste, car dans le cas où n est pair, b est impair, et dans le cas où n est impair, b est divisible par 2 mais pas par 4 puisque
$(2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$.
La réponse C est donc aussi juste, et la réponse D fausse.

Deux bonnes réponses : B et C.

31) En notant $a_n = \mathcal{R}e(u_n)$ et $b_n = \mathcal{I}m(u_n)$, la relation de récurrence s'écrit

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{5} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = b_n$$

La suite a est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et tend donc vers 0, et la suite b est constante de limite $b_0 = i\mathcal{I}m(u_0)$.

Une seule bonne réponse : B.

32) $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{100} k = \sum_{k=1}^{50} 2k = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 2550.$

$T_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - S_n = \frac{100 \times 101}{2} - 2550 = 5050 - 2550 = 2500.$

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

33) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

donc $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

La réponse A est juste, la réponse B est fausse.

Puis la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{k}}$ est encadrée d'après ce qui précède par deux sommes télescopiques, ce qui conduit à

$\sqrt{10001}-1<\displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{10000}=100$ donc la réponse C est juste.

Deux bonnes réponses : A et C.

34) Au voisinage de $x=1$, en posant $u=x-1$,

$f_\lambda(x)=\dfrac{u+1+\lambda}{2+2u+u^2}=\dfrac{1+\lambda+u}{2}\times\left(1-u-\frac{u^2}{2}+u^2+\underset{u\to0}{o}(u^2)\right)$

Donc $f_\lambda(x)=\dfrac{1+\lambda}{2}+\dfrac{1-1-\lambda}{2}u+\dfrac{1+\lambda-2}{4}u^2+\underset{u\to0}{o}(u^2)$

ou encore $f_\lambda(x)=\dfrac{1+\lambda}{2}+\dfrac{-\lambda}{2}(x-1)+\dfrac{\lambda-1}{4}(x-1)^2+\underset{x\to1}{o}((x-1)^2)$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse 1 est donc $y=\dfrac{1}{2}+\lambda-\dfrac{\lambda x}{2}$.

Donc, pour $x=2$ et tout λ réel, la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ passe par le point d'ordonnée $y=\dfrac{1}{2}$.

La réponse A est juste.

La réponse B est manifestement fausse puisque la pente de la tangente vaut $\dfrac{-\lambda}{2}$. Et les réponses C et D sont tout aussi fausses.

Une seule bonne réponse : A.

35) $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right|^2=\dfrac{z-2}{z+i}\times\dfrac{\overline{z}-2}{\overline{z}-i}=\dfrac{|z|^2-4\mathcal{R}e\,(z)+4}{|z|^2+2\mathcal{I}m\,(z)+1}$.

Donc $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow |z|^2-4\mathcal{R}e\,(z)+4=|z|^2+2\mathcal{I}m\,(z)+1\Leftrightarrow 2\mathcal{R}e\,(z)+\mathcal{I}m\,(z)=\frac{3}{2}$.

En revenant à la forme algébrique, on a donc $2x+y=\dfrac{3}{2}$ qui est une équation de droite.

$f(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{z-2}{z+i}=\dfrac{\overline{z}-2}{\overline{z}-i}\Leftrightarrow|z|^2-iz-2\overline{z}+2i=|z|^2-2z+i\overline{z}-2i$.

Donc $f(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow(2-i)z-(2+i)\overline{z}=-4i\Leftrightarrow\mathcal{I}m\,((2-i)z)=-2$.

En revenant à nouveau à la forme algébrique, on a donc

$f(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow -x+2y=-2$ qui est à nouveau une équation de droite.

Cependant, pour $x=0$, $y=-1$, ***c'est-à-dire*** $z=-i$ ***qui est valeur interdite pour*** f. Il manque donc un point à cette droite.

Une seule bonne réponse : B.

36) On souhaite résoudre $\text{Arccos}(x)=\text{Arcsin}(2x)$.

Si x est solution, alors en composant par cos on a : $x=\sqrt{1-(2x)^2}$.

Notamment $x\geqslant0$.

Puis en composant par $x\mapsto x^2$, on a : $x^2=1-4x^2$ donc $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Comme on a vu que $x \geqslant 0$, il y a au plus une racine, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Enfin, la fonction donnée est continue, strictement décroissante, définie sur $\left[\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, et

$\text{Arccos}(1/2) - \text{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} < 0$

$\text{Arccos}(-1/2) - \text{Arcsin}(-1) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{-\pi}{2} > 0$

Une seule bonne réponse : D.