Maths - TD n° 2

Démonstrations par analyse-synthèse

Dans l'ensemble du TD, on note $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Principe général

Les démonstrations par analyse-synthèse permettent d'une manière générale de démontrer des ***équivalences logiques***. Elles sont particulièrement adaptées aux exercices où l'on demande :

- de montrer ***l'existence et l'unicité d'une solution*** à un problème donné, sans que l'énoncé ne précise quelle est cette solution que l'on cherche.
  Dans ce cas, l'***analyse*** consiste à ***supposer que la solution existe***, puis à en déduire non seulement son unicité, mais surtout sa forme générale.
  La ***synthèse*** permet alors de montrer que la forme obtenue dans l'analyse fournit bien une solution au problème posé.
- d'obtenir ***une (ou des) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s)*** à une assertion, sans que l'énoncé ne fournisse cette (ces) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s).
  L'***analyse*** consiste alors à supposer l'assertion donnée et à en déduire des conditions qui en découlent (il s'agit du sens direct de l'implication demandée par l'énoncé).
  La ***synthèse*** consiste ensuite à supposer les conditions obtenues dans l'analyse, et à tenter de démontrer l'assertion donnée (réciproque de l'implication demandée). Si on ne parvient pas à faire la synthèse, cela peut être parce que l'analyse n'a pas été conduite assez loin, et que les conditions obtenues ne sont pas assez restrictives.
- de ***résoudre une équation*** lorsque le raisonnement par équivalence s'avère difficile à tenir.
  Dans ce cas, l'***analyse*** consiste à supposer que l'on connaît une solution à l'équation donnée et à en décrire de plus en plus précisément les propriétés.
  La ***synthèse*** consiste à vérifier que les potentielles solutions obtenues vérifient effectivement l'équation donnée.

Exemples :

Ex. 2.1 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $\mathbb{R}$ muni de la loi $* : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x * y = a(x+y) + bxy + c$ soit un groupe.

Ex. 2.2 [$*$] Donner les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f\big(x - f(y)\big) = 2 - x - y$$

II. Exercices

Ex. 2.3 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}$.

1. Soit $v = (1;a;b)$ un vecteur de E (a et b sont deux réels) et $G = \mathrm{Vect}\big(v\big)$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que G soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$.
2. Montrer que si a et b ne vérifient pas la condition obtenue à la question précédente, alors $E = F \oplus G$.

Ex. 2.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose $A = XY^{\mathrm{T}}$ et $r = Y^{\mathrm{T}}X$.

1. À quels espaces de matrices appartiennent A et r ?
2. Donner une formule explicite pour le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A, avec i et j dans des intervalles entiers que l'on précisera.
3. Faire de même pour r.
4. En déduire A^k en fonction de A pour $k \geq 1$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A + I_n$ soit inversible et exprimer alors son inverse en fonction de A.

Ex. 2.5 Soit u une suite telle que $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que u_1 soit défini.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que u_1 et u_2 soient définis.
3. Montrer que si u_0 vérifie la condition de la question précédente, alors la suite u est bien définie.
4. On suppose que la suite est bien définie. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergent vers une même limite.
5. Montrer que u converge et donner sa limite.

Ex. 2.6 [$*$] Soit $a > 0$ et $b < a$ deux réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b)$ pour que le système suivant ait des solutions :
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases}$$

Ex. 2.7 [$*$] Donner les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1 - x) = 1 + x$$

Ex. 2.8 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
   F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
   - la projection p_F sur F parallèlement à G ;
   - la projection p_G sur G parallèlement à F ;
   - la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
3. Soit $M \in E$ une matrice quelconque. Exprimer $p_F(M), p_G(M)$ et $s(M)$ à l'aide de M et M^{T}.
4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
   Résoudre l'équation $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ex. 2.9 (Cor.) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ pour que l'équation $(E) : z^2 + az + b = 0$ admette deux racines dans $\mathbb{U}$.