Continuité

I. Limites de fonctions

I.1. Introduction

La notion de ***continuité d'une fonction réelle (ou complexe) de la variable réelle*** trouve une formalisation rigoureuse au XIX$^{\text{ème}}$ siècle bien qu'elle intervienne de façon souvent confuse beaucoup plus tôt dans l'histoire des mathématiques occidentales. En effet, deux caractéristiques de cette notion ont retardé sa formalisation :

- il s'agit en apparence d'une notion géométriquement très intuitive et fondamentale sur le plan logique ;
- pour cette raison, il semble difficile de la définir, c'est-à-dire de la subordonner à des notions plus fondamentales encore.

Elle ne voit le jour qu'à partir du moment où les notions de nombres réels et complexes sont bien comprises et permettent d'expliciter ce que l'intuition géométrique de continuité signifie au niveau logique.
À cause du lien logique entretenu par les notions de continuité et de nombres réels, les définitions générales sur les fonctions énoncées aux chapitres 1 et 4 ***doivent être révisées et connues***, notamment les propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ totalement ordonné par $\leqslant$ (propriété de la borne supérieure, etc...). Les fonctions usuelles du chapitre 7 sont aussi supposées connues et nous utiliserons fréquemment les développements limités pour calculer des limites en des points où elles sont indéterminées. On rappelle par exemple la définition suivante donnée au chapitre 11 :

Définition 13.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Notation

On note $V(x_0)$ tout voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dans tout le chapitre, on notera D une partie de $\mathbb{R}$, f, g, h des applications de D dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Les applications de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sont appelées ***fonctions réelles d'une variable réelle.*** La plupart des théorèmes de ce chapitre portant sur des fonctions définies sur ***un intervalle réel***, on cherchera souvent à décomposer D en une réunion finie d'intervalles.

Enfin, la notion de continuité ne prend tout son sens que lorsqu'il est possible de ***faire tendre la variable vers un point donné*** ce qui justifie l'introduction de la notion d'***intervalle réel non trivial***, c'est-à-dire comportant une infinité de points :

Définition 13.2 (Intervalle réel non trivial)

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est ***non trivial*** s'il est non vide et non réduit à un point. Autrement dit, si $a < b$ sont des réels, les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ sont de la forme ....

Concernant les démonstrations de ce chapitre, beaucoup sont des redites de celles faites au chapitre 9 sur les suites réelles et, conformément au programme officiel, ne seront pas faites en cours.
Ce qu'il faut comprendre et retenir de ce chapitre :

1) connaître les définitions générales concernant les limites et la continuité et être capable de donner la définition formelle d'une limite ;
2) savoir calculer des limites, notamment consolider les techniques de calcul permettant de lever une indétermination, par exemple à l'aide d'un développement limité ;
3) connaître les théorèmes concernant les limites de fonction (théorème de la limite monotone par exemple) et savoir les utiliser ;
4) notamment connaître et savoir utiliser les différentes formes du ***théorème des valeurs intermédiaires*** et du théorème caractérisant l'image d'un segment par une fonction continue.

I.2. Droite numérique achevée

Définition 13.3 (Rappel : droite numérique achevée)

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Définition 13.4 (Fermeture d'un intervalle)

On appelle ***fermeture*** ou ***adhérence*** d'un intervalle $I \neq \emptyset$ l'ensemble obtenu en adjoignant à I ses bornes supérieures et inférieures si elles existent, $+\infty$ ou $-\infty$ si elles n'existent pas.

Notation

On note $\bar{I}$ la fermeture de I.

Ex. 13.1
$I = [3, 7[$ $\quad \bar{I} =$............ $\qquad I =]-1, +\infty[$ $\quad \bar{I} =$............ $\qquad I = \mathbb{R}$ $\quad \bar{I} =$................

Dans cette partie I est un intervalle réel non trivial, $a \in \bar{I}$ et f, g, h sont des éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

I.3. Définition générale de la limite d'une fonction

Définition 13.5

On dit que $f(x)$ a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \bar{I}$ si et seulement si ***pour tout voisinage*** $V(l)$ ***il existe un voisinage*** $V(a)$ ***tel que*** $f(V(a)) \subset V(l)$.

Notation

On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Ex. 13.2 Traduire la définition précédente en utilisant les quantificateurs dans les cas suivants

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en $+\infty$ si

  ....

- On dit que f tend vers α en $-\infty$ si

  ....

- On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si

  ....

- On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si

  ....

- On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si

  ....

  Soit $a \in I$ ou $a = \sup I$ ou $a = \inf I$ si elles existent.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en a si

  ....

- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si

  ....

I.4. Limites à droite, limites à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 13.6

- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne inférieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^+ (ou à droite de a ou quand x tend vers a par valeurs supérieures) si

  ....

- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne supérieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^- (ou à gauche de a ou quand x tend vers a par valeurs inférieures) si

  ....

Définition 13.7

On dit qu'une fonction f définie sur $I \backslash \{a\}$ possède une limite en a si

- elle possède une limite ***à droite*** et une limite ***à gauche*** en a ;
- ces deux limites sont égales.

Notation

On note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \alpha$ la limite à droite et
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \alpha$ la limite à gauche.
On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \alpha$ ou plus simplement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ la limite en a d'une fonction définie sur un voisinage de a privé de a.

Ex. 13.3

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

....

....

....

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

....

....

....

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

....

....

....

I.5. Propriétés

Propriété 13.8

Si f admet une limite finie en $a \in \overline{I}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 13.9

La limite (finie ou infinie) d'une fonction est unique si elle existe.

De plus pour $a \in I$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \alpha \end{cases}$

Propriété 13.10

$\forall a \in I$, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \alpha$

I.6. Limites et suites

Théorème 13.11

Soient $a \in \bar{I}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, u une suite d'éléments de I.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n &= a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) &= \alpha \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \alpha$$

I.7. Interprétation graphique

Proposition 13.12 (Asymptote verticale)

Pour $a \in \mathbb{R} \cap \bar{I}$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale au graphe de f.

Proposition 13.13 (Asymptote horizontale)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ alors la droite d'équation $y = \alpha$ est asymptote horizontale au graphe de f.

Proposition 13.14 (Asymptote oblique)

S'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ux + v) = 0$ alors la droite d'équation $y = ux + v$ est asymptote oblique au graphe de f.
Le signe de $f(x) - (ux + v)$ permet alors de connaître la position de cette droite par rapport au graphe de f.

I.8. Opérations sur les limites

Proposition 13.15 (Somme de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

Proposition 13.16 (Produit de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$					
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$					
$\alpha' = 0$					
$+\infty$					
$-\infty$					

Proposition 13.17 (Inverse d'une fonction)

$a \in \bar{I}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$.

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $V(a)\backslash\{a\}$, alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $V(a)\backslash\{a\}$, alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition 13.18 (Composition de limites)

f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$

Ex. 13.4

$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ possède-t-elle une limite en 0^+ ? en 0^- ? en 0 ?

Cor. 13.4

II. Limites et relation d'ordre

II.1. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 13.19

$a \in \bar{I}$, α et $\alpha' \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \alpha' \end{array}\right. \quad \text{alors } \alpha \leq \alpha'.$$

II.2. Théorème(s) des gendarmes

Théorème 13.20 (Théorème des gendarmes)

$a \in \bar{I}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha \end{array}\right. \quad \text{alors } \lim_{x\to a} g(x) = \alpha.$$

Théorème 13.21

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } |f(x)| \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right. \quad \text{alors } \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Théorème 13.22

Si pour tout x au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x)$ et

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

II.3. Limites aux bornes pour une application monotone

Théorème 13.23 (Théorème de la limite monotone)

$(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si f est ***définie et croissante*** sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
- si f est minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf f$.

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$;
- si f est majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup f$.

Si f est ***définie et décroissante*** sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

III. Continuité en un point

III.1. Définition

Définition 13.24

On dit que f ***est continue en*** $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

En revenant à la définition de la limite en un point, on a donc :

f continue en a si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.

Si f n'est pas continue en a, on dit que f est ***discontinue en*** a.

III.2. Continuité à droite et à gauche

Définition 13.25

Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f est ***continue à gauche en*** a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Si a n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que f est ***continue à droite en*** a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Théorème 13.26

Si a n'est pas une extrémité de I,
f continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

III.3. Prolongement par continuité

Définition 13.27

Soit a une extrémité de l'intervalle I n'appartenant pas à I.
Autrement dit, on considère une fonction f définie sur un intervalle ***ouvert*** en son extrémité a.
Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, on dit que f ***est prolongeable par continuité en*** a
et on pose : $g : \left\{ \begin{array}{lll} I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x \in I & \mapsto & g(x) = f(x) \\ a & \mapsto & g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{array} \right.$
g est appelée ***prolongement par continuité de*** f ***en*** a.

Ex. 13.5 Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\sin x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

Cor. 13.5

III.4. Opérations sur les fonctions continues en un point

Proposition 13.28

Si f et g sont des fonctions continues en a et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

- $f + g$ est continue en a ;
- fg est continue en a ;
- αf est continue en a ;
- $|f|$ est continue en a ;
- $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a ;
- si $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ et si $g \circ f$ est définie sur un voisinage de a alors $g \circ f$ est continue en a.

III.5. Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a

Théorème 13.29

Si f est continue en $a \in I$ alors l'image par f de toute suite de $I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.

IV. Continuité sur un intervalle

IV.1. Définition

Définition 13.30

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Notation

On note $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur I.

IV.2. Propriétés

Proposition 13.31

Si f et g sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- ***Combinaison linéaire*** : $\alpha f + \beta g$ est continue sur I ;
- ***Produit*** : fg est continue sur I ;
- ***Quotient*** : si f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I ;
- ***Valeur absolue*** : $|f|$ est continue sur I ;
- ***Max et min*** : $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $g \in \mathcal{C}^0(J)$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Exemples :

- Les applications constantes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition ;
- les applications usuelles (ln,exp,sin,cos,$x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque

Dans la pratique, pour démontrer la continuité d'une fonction, on utilise les théorèmes opératoires. Les cas où un retour à la définition de la continuité et de la limite sont nécessaires sont rares et sont considérés comme difficiles.

IV.3. Restrictions

Définition 13.32

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $J \subset I$, on dit que f est continue sur J si la restriction de f à J est continue.

Ex. 13.6 Montrer que $f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & \frac{x}{|x|} \\ x = 0 & \mapsto & 1 \end{array}\right.$ est continue sur $[0;+\infty[$ mais pas en 0.

Cor. 13.6

V. Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 13.33 (Théorème de Bolzano)

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a;b], f(c) = 0$.

Démonstration

Remarque

Si l'on impose $f(a)f(b) < 0$, on peut conclure que $c \in]a;b[$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.

Méthode : Utilisation du TVI

Dans les exercices où on cherche à montrer qu'une fonction f ***continue*** vérifie une propriété de la forme

$$\exists c \in I, f(c) = cte$$

on introduira une fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - cte$ et on montrera que g s'annule.

Ex. 13.7 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{3}\right) = f(c)$.
3) Montrer que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\exists c \in [0;1], f\left(c + \frac{1}{p}\right) = f(c)$.

Théorème 13.34 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction continue sur I, a et b deux éléments de I tels que $f(a) < f(b)$, alors $\forall y \in]f(a); f(b)[, \exists x \in]a;b[, f(x) = y$.

Démonstration

Théorème 13.35 (Image continue d'un intervalle)

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Ex. 13.8 Soit $I =]0;2[$. Calculer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
2) $f : x \mapsto \sin(\pi x)$;
3) $f : x \mapsto (x-1)^2$;
4) $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Que peut-on en conclure sur l'image par une fonction continue d'un intervalle de type ouvert/ouvert ?

VI. Fonctions continues sur un segment

Théorème 13.36 (Image continue d'un segment)

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [m;M]$ où $m, M \in \mathbb{R}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 13.37

Toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : étant donnée une fonction continue sur $[a;b]$

- $\exists x_0 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_0) = m \leq f(x)$
- $\exists x_1 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_1) = M \geq f(x)$

Théorème 13.38

Soit f une fonction continue sur I.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration

Théorème 13.39 (Théorème de la bijection continue)

Si f est injective et continue alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, strictement monotone, de même monotonie que f.

Démonstration

Remarque

Ce théorème a permis de construire les fonctions $\text{Arcsin}, \text{Arccos}$, etc...

Corollaire 13.40

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists! c \in]a;b[, f(c) = 0$.