Maths - DS n°4 - Mercredi 21 janvier, 2 heures

Équations différentielles, intégrales, suites, calcul matriciel

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $BA = I_n$ et $AC = I_n$.
Montrer que $B = C$.

2) Donner les quatre premiers termes non nuls des développements limités en 0 de $\ln(1+x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\sin(x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Exercices

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Calculer N^2 et $A - N$.

2) En déduire une formule explicite pour les coefficients de A^p avec $p \in \mathbb{N}$.

3) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 3.

On définit les suites $\begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} &= \sqrt{2}x_{n+1} - x_n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 &\in \mathbb{C}^* \\ y_1 &\in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} &= \sqrt{2}y_{n+1} - y_n \end{cases}$.

1) Exprimer ***explicitement*** x_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que x est une suite périodique de période 8.

3) On rappelle que y n'est pas la suite nulle puisque $y_0 \neq 0$.
Montrer que y est périodique de plus petite période 8.

Exercice 4.

1) Soit $r \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$$

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{2x}{1+x^2}f(x) = (1+x^2)\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Exercice 5.

On définit les suites u, v et w par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \qquad w_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$$

PARTIE A - Étude des suites u et v

1) Montrer que u est croissante.
2) Montrer que v est décroissante.
3) Montrer que u et v convergent vers une même limite L.

PARTIE B - Limite des suites u et v

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que $\forall t \in [k; k+1], \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
   $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$.
4) En déduire la limite L commune aux suites u et v.

PARTIE C - Complément

1) Donner un ordre de grandeur de la qualité de l'approximation de L par u_{500}.
2) La suite w converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?
3) Écrire une fonction Python `def u(n):` prenant en paramètre un entier n et renvoyant la valeur de u_n.