Correction DS n°4

Exercice 1.

Par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 4 & 3 & 4 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & x-3y \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & -4 & z-4y \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & x+y-z \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & -4 & z-4y \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & x+y-z \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & 0 & -4x-8y+5z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & x+y-z \\ 1 & 0 & 0 & -2x-5y+3z \\ 0 & -1 & 0 & -4x-8y+5z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 + 2L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2x-5y+3z \\ 0 & 1 & 0 & 4x+8y-5z \\ 0 & 0 & 1 & -x-y+z \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_1 \end{matrix}$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 4 & 8 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

   $A - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$.

2) On souhaite calculer A^p avec $p \in \mathbb{N}$.
   D'après la question précédente, $A = 2I_3 + N$. Or I_3 commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc d'après la formule du binôme pour les matrices commutantes
   $A^p = (2I_3 + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{p-k} N^k$.
   De plus, toujours d'après la question précédente, $N^2 = 0_3$, donc $\forall k \geqslant 2, N^k = 0_3$.

Donc $A^p = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} 2^{p-k} N^k = 2^p I_3 + p2^{p-1}N$. Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2-p & 0 & p \\ -p & 2 & p \\ -p & 0 & 2+p \end{pmatrix}$$

3) On peut conjecturer que si A est inversible, alors on obtient son inverse en posant $p = -1$ dans la formule de la question précédente.
Posons donc $B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a alors $AB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$.
On vérifie de même que $BA = I_3$.
Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

On définit les suites $\begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} &= \sqrt{2}x_{n+1} - x_n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 &\in \mathbb{C}^* \\ y_1 &\in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} &= \sqrt{2}y_{n+1} - y_n \end{cases}$.

1) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
Équation caractéristique : $r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 2 - 4 = -2 = (\sqrt{2}i)^2$.
Donc deux solutions $r_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Comme par ailleurs $x_0 = 0$, on a $\lambda = 0$.
Et comme $x_1 = 1$, on a $\mu\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$ donc $\mu = \sqrt{2}$.
Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sqrt{2}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$x_{n+8} = \sqrt{2}\sin\left((n+8)\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(n\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sqrt{2}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = x_n$.
Donc x est périodique de période 8.

3) On rappelle que y n'est pas la suite nulle puisque $y_0 \neq 0$.
De plus, y est à priori une suite à valeurs complexes puisque $y_0 \in \mathbb{C}^*$.
On obtient donc une formule explicite par la même méthode qu'à la question 1), ce qui conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \lambda e^{i\frac{n\pi}{4}} + \mu e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Pour tout entier naturel n, on a donc $y_{n+8} = \lambda e^{i\frac{n\pi}{4}+2i\pi} + \mu e^{-i\frac{n\pi}{4}-2i\pi} = y_n$.
Donc y est périodique de période 8.
Pour montrer que 8 est la plus petite période strictement positive, montrons que y ***n'est pas*** 4-périodique.
$y_{n+4} = \lambda e^{i\frac{n\pi}{4}+i\pi} + \mu e^{-i\frac{n\pi}{4}-i\pi} = -\lambda e^{i\frac{n\pi}{4}} - \mu e^{-i\frac{n\pi}{4}}$.
Montrons par l'absurde que $y_{n+4} \neq y_n$.
Supposons donc que $y_{n+4} = y_n$ ce qui équivaut à
$\forall n \in \mathbb{N}, 2\lambda e^{i\frac{n\pi}{4}} + 2\mu e^{-i\frac{n\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow 2y_n = 0$ ce qui est absurde puisque y n'est pas la suite nulle.
Donc y est 8-périodique, aucun diviseur de 8 n'est une période de y donc y est périodique de plus petite période 8.

Exercice 4.

1) Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(E) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$
Équation homogène : $(E_H) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$
$A(x) = \displaystyle\int^x -\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\ln(1+x^2)$ en reconnaissant la forme $\dfrac{u'}{u}$.
Donc $y_H = \lambda e^{\ln(1+x^2)} = \lambda\,(1+x^2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : par la méthode de variation de la constante.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_P = \lambda(x)\,(1+x^2)$.
En réinjectant dans (E) on obtient : $\lambda'\,(1+x^2) = r\,(1+x^2)$.
Donc $\lambda' = r$ et $\lambda = rx$.
Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = \lambda\left(1+x^2\right) + rx\left(1+x^2\right) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

2) On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}f(x) = (1+x^2)\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$
Ici, $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ est ***un nombre réel***, qui ***dépend de la fonction inconnue***.
Analyse : soit f une solution du problème.
En posant $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$, f est donc solution de $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$.
Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3$.
Or $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda + ru + \lambda u^2 + ru^3\mathrm{d}u = \lambda + \frac{r}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{r}{4}$
Donc $\dfrac{r}{4} = \dfrac{4\lambda}{3}$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$ (en posant $\lambda = 3\mu$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ à choisir librement).
Synthèse : soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$.
Alors, f est continue et dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2$

Donc $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - \dfrac{2x}{1+x^2} \times (3\mu + 16\mu x)(1+x^2)$
c'est-à-dire $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - 6\mu x - 32\mu x^2 = 16\mu(1+x^2)$.
Or $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3\mu + \frac{16\mu}{2} + \frac{3\mu}{3} + \frac{16\mu}{4} = 16\mu$.
Donc f est bien solution de $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = (1+x^2)\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$.
Finalement, l'ensemble des solutions du problème posé est

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu\big(3 + 16x + 3x^2 + 16x^3\big), \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

Exercice 5.

On définit les suites u, v et w par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \qquad w_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$$

PARTIE A - Étude des suites u et v

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$, les autres termes des deux sommes s'annulant deux à deux.
Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1+2n+2-4n-2}{2(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.
Donc u est strictement croissante.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$, les autres termes des deux sommes s'annulant deux à deux.
Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2n+2+2n+3-2(2n+3)}{2(n+1)(2n+3)} = \dfrac{-1}{2(n+1)(2n+3)} < 0$.
Donc v est strictement décroissante.

3) Montrons que les suites u et v sont adjacentes.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_n - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1}$, les autres termes des deux sommes s'annulant deux à deux.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
Comme, par ailleurs, d'après les deux questions précédentes, u est croissante et v est décroissante, les deux suites u et v sont adjacentes.
Donc elles convergent vers une même limite L, ce qu'il fallait démontrer.

PARTIE B - Limite des suites u et v

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, comme $[k;k+1] \subset \mathbb{R}_+^*$,
$\forall t \in [k;k+1], k \leqslant t \leqslant k+1 \Rightarrow \forall t \in [k;k+1], \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

Par croissance de l'intégrale, en intégrant sur $[k;k+1]$ l'encadrement de la question précédente on a :
$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}t.$

Donc $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

L'inégalité de droite permet d'écrire $\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

L'inégalité de gauche permet d'écrire $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln(k)$, soit, en posant $j=k+1$:
$\dfrac{1}{j} \leqslant \ln(j)-\ln(j-1)$.

Comme $k \geqslant 1$, cette inégalité est valable pour $j \geqslant 2$.

Donc, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1)$$

3) Supposons $n>0$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ où, dans la somme, $k \geqslant n+1 \geqslant 2$.

On peut donc utiliser l'encadrement de la question précédente.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)-\ln(k-1).$

Or, dans le membre droit et dans le membre gauche de l'encadrement, les sommes sont télescopiques. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(2n+1)-\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(2n)-\ln(n)$.

Donc, par propriété opératoire du logarithme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) = \ln(2).$

Donc, d'après l'encadrement de la question précédente et le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n = \ln(2)$.

Donc la limite commune des suites u et v est $L=\ln(2)$.

PARTIE C - Complément

1) D'après la question A-3), $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ln(2) \leqslant v_n$ d'une part (car les suites u et v sont adjacentes et convergent vers $\ln(2)$)

et $v_n - u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Donc, pour tout entier n, $0 \leqslant \ln(2)-u_n \leqslant v_n-u_n$.

Donc la qualité de l'approximation de $\ln(2)$ par u_{500} est meilleure que $\dfrac{1}{2\times 500+1} \approx 10^{-3}$.

2) Le même raisonnement fait à la question B-3) pour la suite u peut être fait pour la suite w.

Ceci conduit à $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\dfrac{3n+1}{n+1}\right) \leqslant w_n \leqslant \ln(3)$.

En utilisant alors le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}w_n = \ln(3)$$

3) Par exemple :

```
def u(n):
    res = 0
    for k in range(n+1,2*n+1):
        res += 1/k
    return res
```

Un appel à `u(500)` donne `0.6926474305598198` à comparer avec la valeur `0.6931471805599453` donnée par `np.log(2)`, ce qui confirme que u_{500} est une approximation par défaut de $\ln(2)$ à (mieux que) 10^{-3} près.