Correction DM n°5

Exercice 1.

1) F et G sont de manière évidente inclus dans E.
La fonction nulle est à la fois paire et impaire donc appartient à F et à G.
Enfin, toute combinaison linéaire de fonctions paires est paire. En effet, soit $u \in F$ et $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda u + \mu v)(-x) = \lambda u(-x) + \mu v(-x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$ car u et v sont paires.
Donc $\lambda u + \mu v$ est elle aussi paire.
On démontre de même que G est stable par combinaison linéaire.
Donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2) Soit u une fonction à la fois paire et impaire.
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = u(x)$ car u est paire.
Mais aussi, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = -u(x)$ car u est impaire.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = -u(x)$: donc pour tout x réel, $2u(x) = 0$.
Donc u est la fonction nulle.
Donc la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

3) ***Analyse*** : soit $f \in E$ et supposons qu'il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
Alors, d'une part $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_f(x) + I_f(x)$.
D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = P_f(-x) + I_f(-x) = P_f(x) - I_f(x)$ car P_f est paire, et I_f est impaire.
En sommant ces deux relations, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
Et par soustraction, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, I_f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Donc, si P_f et I_f existent, elles sont uniques et données par les deux relations précédentes.
Synthèse : soit $f \in E$ et notons $P_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right.$ et $I_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$
Alors :
- P_f est une fonction paire : en effet, pour tout réel x,
$P_f(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = P_f(x)$.
- I_f est une fonction impaire : en effet, pour tout réel x,
$I_f(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{-f(x) + f(-x)}{2} = -I_f(x)$.
- $f = P_f + I_f$. En effet, pour tout réel x,
$P_f(x) + I_f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$.

Donc il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$, de plus ces deux fonctions sont uniques.

4) La question précédente prouve que $E = F + G$. La question 2) prouve de plus que la somme

est directe.

Donc

$$E = F \oplus G$$

5) Applications numériques : explicitons les fonctions P_f et I_f dans les cas suivants

a) $f = \exp$: pour tout réel x,

$P_f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ et

$I_f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

Donc $P_{\exp} = \mathrm{ch}$ et $I_{\exp} = \mathrm{sh}$.

b) $f = x \mapsto e^{ix}$: pour tout réel x,

$P_f(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x) = \mathcal{R}e\left(e^{ix}\right)$ et

$I_f(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\sin(x) = i\mathcal{I}m\left(e^{ix}\right)$.

Donc $P_f = \cos$ et $I_f = i\sin$.

c) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$: pour tout réel x,

$P_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 + 2 + 3x + 5x^2 - x^3}{2} = 2 + 5x^2$ et

$I_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 - 2 - 3x - 5x^2 + x^3}{2} = -3x + x^3$

d) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$: pour tout réel x,

$P_f(x) = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}{2} = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et

$I_f = f - P_f$ par définition, donc $I_f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^x - 1}{2\left(1+e^x\right)}$.

Exercice 2.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$ et on recherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies et $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I =]-1;1[$.

1) Soit y une solution de (E) et posons $x = \sin(t)$ et $z(t) = y(x) = y(\sin t)$.

Sur $J = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$z'(t) = \cos(t)y'(\sin t)$

et $z''(t) = -\sin(t)y'(\sin t) + \cos^2(t)y''(\sin t)$

Or $(1-x^2)y''(x) = \cos^2(t)y''(\sin t) = 3xy'(x) + y(x) = 3\sin(t)y'(\sin t) + y(\sin t)$.

Donc $\cos^2(t)y''(\sin t) - \sin(t)y'(\sin t) - 2\sin(t)y'(\sin t) - y(\sin t) = 0$.

En multipliant cette égalité par $\cos t$ et en identifiant les z, z' et z'' dans l'expression on obtient que z est solution de l'équation différentielle

$$(E') : \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0 \;\text{ sur }\; J = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

2) Soit z une solution de (E') et posons $\phi(t) = \cos(t)z(t)$. Sur J :

$\phi'(t) = -\sin(t)z(t) + \cos(t)z'(t)$

et $\phi''(t) = -\cos(t)z(t) - 2\sin(t)z'(t) + \cos(t)z''(t)$.

Donc l'équation (E') satisfaite par z se traduit pour ϕ par :
$\phi''(t) = 0$.
On a donc $\phi'(t) = b \in \mathbb{R}$ et $\phi(t) = a + bt, (a; b) \in \mathbb{R}^2$.

3) $\forall x \in]-1; 1[, \text{Arcsin}\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos(\text{Arcsin}\, x) > 0$.
Or $\forall x \in]-1; 1[, \sin(\text{Arcsin}\, x) = x$ et $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}\, x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

4) Nous avons, $\forall t \in J$, $\phi(t) = a + bt, (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et si z est solution de (E') alors $\phi(t) = \cos(t) z(t)$. Donc l'ensemble des solutions de (E') est inclus dans $\left\{t \mapsto \frac{a+bt}{\cos t}, (a; b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Une vérification immédiate permet de plus de montrer que toutes ces fonctions sont effectivement solutions de (E').
De même, $\forall t \in J$, $z(t) = \frac{a+bt}{\cos t}, (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et si y est solution de (E) alors $z(t) = y(\sin t)$.
Donc l'ensemble des solutions de (E) est inclus dans $\left\{x \mapsto \frac{a+b\text{ Arcsin}\, x}{\cos \text{Arcsin}\, x} = \frac{a+b\text{ Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}, (a; b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Une vérification immédiate permet de montrer que toutes ces fonctions sont effectivement solutions de (E).

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{a + b\text{ Arcsin}\, x}{\sqrt{1 - x^2}}, (a; b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

PARTIE B

On considère une fonction f solution de (E).

1) f est $\mathcal{C}^2(]-1; 1[, \mathbb{R})$ par hypothèse. Or d'après (E), $f''(x) = \frac{3xf'(x)+f(x)}{1-x^2}$ est somme, produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^1(]-1; 1[, \mathbb{R})$ - le dénominateur ne s'annulant pas sur I, donc f'' est $\mathcal{C}^1(]-1; 1[, \mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{C}^3(]-1; 1[, \mathbb{R})$.
Ceci ouvre la voie à une démonstration par récurrence dont nous venons de faire l'initialisation.
Hérédité : supposons que f soit $\mathcal{C}^n(]-1; 1[, \mathbb{R})$. D'après (E), $f''(x) = \frac{3xf'(x)+f(x)}{1-x^2}$ est somme, produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^{n-1}(]-1; 1[, \mathbb{R})$ - le dénominateur ne s'annulant pas sur I, donc f'' est $\mathcal{C}^{n-1}(]-1; 1[, \mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]-1; 1[, \mathbb{R})$.
Conclusion : la propriété est initialisée aux rangs $n = 0, 1, 2$ (puisqu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est aussi par définition de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$) et héréditaire à partir du rang 2, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc f est $\mathcal{C}^\infty(]-1; 1[, \mathbb{R})$.

2) Nous venons de voir que f est $\mathcal{C}^\infty(]-1; 1[, \mathbb{R})$, donc d'après la formule de Taylor-Young, f possède un $\text{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.
Utilisons la formule de Taylor-Young en 0 :
$f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.
Par unicité du développement limité

$$\forall i \in [\![1; n]\!], a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

4) Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n + 3) x f^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

Initialisation : pour $n = 0$, $(1-x^2)f^{(2)}(x) - 3xf^{(1)}(x) - f^{(0)}(x) = 0$ est l'équation différentielle (E) satisfaite par f.

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n et dérivons la :

$(1-x^2)f^{(n+3)}(x)-2xf^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+2)}(x)-(2n+3)f^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n+1)}(x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - (2n+5)xf^{(n+2)}(x) - \left[(2n+3)+(n+1)^2\right]f^{(n+1)}(x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x^2)f^{(n+1+2)}(x) - (2(n+1)+3)xf^{(n+1+1)}(x) - \left[(n+1+1)^2\right]f^{(n+1)}(x) = 0$

Conclusion : la propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, par récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) En prenant $x = 0$ dans la formule précédente, on obtient
$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+2)}(0) = (n+1)^2 f^{(n)}(0)$. Divisons par $(n+2)!$:
$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} = \frac{(n+1)^2 f^{(n)}(0)}{n!(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)}a_n$ en utilisant la question 3-.

6) La formule de récurrence précédente conduit donc suivant la parité de n à :

$$a_{2p+1} = \frac{\prod_{i=1}^{p} 2i}{\prod_{i=0}^{p} 2i+1}a_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}a_1$$

$$a_{2p} = \frac{\prod_{i=0}^{p-1} 2i+1}{\prod_{i=1}^{p} 2i}a_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}a_0$$

PARTIE C

- Pour obtenir le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$, on prend $a = 0 = a_0$ et $b = 1 = a_1$.

  Donc $\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$.
- Pour obtenir le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on prend $a = 1 = a_0$ et $b = 0 = a_1$.

  Donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}x^{2p} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$.
- Pour obtenir le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$, on primitive celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

  Donc $\operatorname{Arcsin} x = \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(2p+1)}x^{2p+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$.