

ENAC 2021 - sous réserve que je n'aie fait aucune erreur moi-même

François Coulombeau

coulombeau@gmail.com

Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

23 février 2026

- 1) $\operatorname{Re}(z) = 1 - \tan^2(\alpha) \in]0; 1[$ car $\alpha \in]-\frac{\pi}{4}; 0[$.

La réponse A est donc fausse.

Pour les autres questions, il s'agit de mettre z sous forme trigonométrique.

$$|z|^2 = 1 + \tan^4(\alpha) - 2 \tan^2(\alpha) + 4 \tan^2(\alpha) = (1 + \tan^2(\alpha))^2.$$

$$\text{Donc } z = (1 + \tan^2(\alpha)) \times \frac{1 - \tan^2(\alpha) + i2 \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = (1 + \tan^2(\alpha)) \times (\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)).$$

La réponse B est donc fausse, la réponse C aussi.

Une seule bonne réponse : D.

- 2) Soit n un entier dont l'écriture se termine par 5 : $n = 10k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$n^2 = 100k^2 + 100k + 25 \text{ donc l'écriture de } n^2 \text{ se termine par 5 et 25.}$$

Deux bonnes réponses : A et B.

- 3) $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Donc $(-1 + i\sqrt{3})^k = 2^k e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ a pour argument $\frac{2k\pi}{3}$ qui n'est jamais congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π puisque

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{4k\pi - 3\pi}{6} \text{ et que } 4k - 3 \text{ n'est jamais divisible par 6.}$$

Une seule bonne réponse : D.

- 4) F est strictement croissante puisque sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en des points isolés, il y a donc au plus une solution.

$$\text{Par ailleurs, } \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \text{ donc } F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \text{ a pour limite } \pm\infty \text{ en } \pm\infty.$$

Une seule bonne réponse : C.

- 5)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

On passe par l'évènement contraire : soit A l'évènement « aucune réponse n'est exacte ».

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}.$$

La probabilité demandée est donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{65}{81}$.

Une seule bonne réponse : D.

6)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Choisir une droite, c'est choisir 2 points parmi les 5 sommets : il y a donc $\binom{5}{2} = 10$ droites dans l'ensemble Δ . Et comme il y a 5 côtés, il y a 5 diagonales. Pour 4 points choisis parmi les 5 sommets, il y a 3 points d'intersection formés par les droites passant par ces 4 points. Il y a donc $3 \times \binom{5}{4} = 15$ points d'intersection autres que les sommets. Enfin, choisir un triangle formé par les sommets du pentagone, c'est choisir 3 points parmi les 5 : il y a donc $\binom{5}{3} = 10$ triangles formés par trois sommets du pentagone.

On peut aussi... faire un dessin !

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

7) (i) s'écrit rouge d'un côté $\Rightarrow$ vert de l'autre

(ii) s'écrit jaune d'un côté $\Rightarrow$ noir de l'autre.

Pour savoir si (i) est vraie, il faut et il suffit donc de retourner toutes les plaques qui ne sont pas vertes (penser au fait que la face cachée pourrait être rouge) : la réponse A est bonne. Pour savoir si (i) est vraie, il faut donc retourner 1 et 5, mais pas la 2 : la réponse B est fausse.

Et pour savoir si (ii) est vraie, il faut et il suffit donc de retourner toutes les plaques qui ne sont pas noires : les réponses C et D sont fausses.

Une seule bonne réponse : A.

8)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Le vecteur $(\sqrt{3}; 1)$ est orthogonal à la droite. On le norme : $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Un point $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$, notamment la distance de la droite au point O vaut 1.

La droite est donc tangente au cercle en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Une seule bonne réponse : B.

9) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos(t) dt &= [t^2 \sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi 2t \sin(t) dt \\ &= [2t \cos(t)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \cos(t) dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

Une seule bonne réponse : D.

10) Par définition $\alpha^2 = \alpha + 1$.

$$\text{Donc } \alpha^4 = (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1) + 2\alpha + 1 = 3\alpha + 2$$

$$\text{Puis } \alpha^5 = 3\alpha^2 + 2\alpha = 3(\alpha + 1) + 2\alpha = 5\alpha + 3$$

Une seule bonne réponse : C.

11) Réduire le prix de vente de 10% c'est multiplier le prix à l'unité par 0,9.

Augmenter la quantité de 10% c'est diviser le prix à l'unité par 1,1.

Or $\frac{1}{1+t} = \frac{1-t}{1-t^2} > 1-t$. Donc multiplier par 0,9 est plus favorable que de diviser par 1,1.

Une seule bonne réponse : A.

12) Le produit de deux fonctions continues est continu.

Mais la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, donc $x \mapsto |\cos(\pi x)|$ n'est pas dérivable pour $x = \frac{1}{2}[1]$.

Donc f est non dérivable en $1/2$.

Deux bonnes réponses : B et C.

13) $J(x) = \frac{\sin^6(x)}{6}$ se primitive à vue.

On linéarise alors

$$J(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6 = \frac{-1}{6 \times 64} \times (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix})$$

$$\text{Donc } J(x) = \frac{-1}{6 \times 64} \times (2 \cos(6x) - 12 \cos(4x) + 30 \cos(2x) - 20).$$

$$\text{Donc } I = \frac{-1}{3 \times 64} \times \left(\frac{-1}{6} - 0 + \frac{15}{2} - \frac{5\pi}{2} \right) = \frac{15\pi - 44}{1152}.$$

Une seule bonne réponse : D.

14)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

C'est une application du théorème sur les équations linéaires que nous n'avons pas encore vu.

$$\text{Soit } \phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto (n \mapsto u_{n+1} - 2u_n) \end{cases}.$$

ϕ est linéaire. Il s'agit de résoudre $\phi(u) = (n \mapsto -n + 1)$ qui est une équation linéaire.

On résout l'équation homogène : $\phi(u) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a2^n$.

Puis on cherche une solution particulière : ici, la suite $u_n = n$ est solution évidente de la formule de récurrence donnée.

Enfin, $u_0 = 1$ donne $u_n = n + 2^n$.

Deux bonnes réponses : A et C.

15)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ donc } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{100}.$$

$$\text{De même } \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \frac{32}{100}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(A) = \frac{38}{100} \text{ et } \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{38}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} = 0,52.$$

Une seule bonne réponse : B.

- 16) Carré rouge conduit à cercle vert d'après (i) donc à losange vert d'après (iii) : contradiction puisque chaque couleur est attribuée une et une seule fois.

De même carré vert conduit losange vert d'après (ii) et (iii) qui est contradictoire.

Donc le carré est bleu. Ceci permet de retirer les réponses A, B et C.

Il reste la réponse D mais elle contredit l'hypothèse (iii).

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

17)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

On calcule l'espérance de Y :

$$\mathbb{E}(Y) = -10 \times 0,15 - 7 \times 0,25 + 3 \times 0,2 + 12 \times 0,15 + 16 \times 0,05 = -0,05.$$

Le jeu est donc inéquitable, favorable à la banque.

Deux bonnes réponses : C et D.

$$18) J_n(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = 0 \text{ car la somme des racines } n\text{-èmes de l'unité est nulle pour } n \geq 2.$$

Une seule bonne réponse : A.

$$19) K_n(x) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix/2} e^{ikx} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{ix/2} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right).$$

$$\text{Donc } K_n(x) = \frac{\sin^2 \left(\frac{nx}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}.$$

Donc $\sin \left(\frac{x}{2} \right) K_n(x)$ est un carré.

Une seule bonne réponse : D.

- 20) Les réponses A et B et C sont justes!!!

Là, il y a un soucis je pense, puisqu'au plus deux réponses sont censées être exactes.

Ne pas répondre à cette question...

- 21) En supposant $p \geq 2$:

$$B(p-1, q+1) = \int_0^1 x^{p-2} (1-x)^q dx = \left[\frac{x^{p-1}}{p-1} (1-x)^q \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{qx^{p-1} (1-x)^{q-1}}{p-1} dx$$

$$\text{Donc } B(p-1, q+1) = \frac{q}{p-1} B(p, q).$$

$$\text{De plus } B(1, q+p-1) = \int_0^1 (1-x)^{q+p-2} dx = \frac{1}{p+q-1}.$$

$$\text{Donc } B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q+1) = \dots = \frac{(p-1)!}{q(q+1)\dots(p+q-1)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Une seule bonne réponse : C.

22)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

$15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ en décomposant en produit de facteurs premiers.

Puis, choisir un diviseur, c'est

a) choisir un exposant pour 2 compris entre 0 et 11 : 12 choix possibles.

b) choisir un exposant pour 3 compris entre 0 et 6 : 7 choix possibles.

c) etc...

Il y a donc $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$ diviseurs de $15!$

Une seule bonne réponse : B.

23)

Question hors-programme PCSI.

C'est du calcul modulo 13, hors-programme en PCSI mais au programme MPSI.

$100^{1000} = 9^{1000}[13] = (-4)^{1000}[13] = 4^{1000}[13]$ car $100 = 13 \times 8 - 4 = 13 \times 7 + 9$

$4^{1000} = 3^{500}[13]$ car $4^2 = 16 = 3[13]$.

Donc $9^{1000} = 9^{250}[13] = 3^{125}[13] = 3 \cdot 3^{124}[13] = 3 \cdot 3^{31}[13]$

Donc $9^{1000} = 3^{32}[13] = 3^8[13] = 3^2[13] = 9[13]$

Une seule bonne réponse : A.

24)

Question hors-programme PCSI.

La notion de classe d'équivalence est hors-programme en PCSI (depuis de très nombreuses années...).

D, c'est la définition d'une classe d'équivalence.

C, c'est son interprétation géométrique.

Deux bonnes réponses : C et D.

25)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Cette question concerne le prochain chapitre sur les espaces vectoriels.

Une famille est dite libre si la seule combinaison linéaire des vecteurs de cette famille donnant le vecteur nul

est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Les réponses C et D sont franchement hors-programme (PCSI et MPSI), ce qui est un peu gênant (d'autant qu'elles sont mal formulées, puisqu'on aurait dû écrire **du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel** $\mathbb{R}$).

L'idée c'est que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.

Deux bonnes réponses : A et C.

26)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Si a, b, c sont deux à deux distincts, la matrice est donc inversible, donc de rang 3.

Si deux d'entre eux sont égaux mais distincts du troisième, on a deux colonnes égales, donc rang inférieur ou égal à 2. Et les deux premières lignes sont non proportionnelles, donc rang 2.

Deux bonnes réponses : A et D.

27) On écrit $\sin^2 = 1 - \cos^2$ puis on pose $X = 2^{4\cos^2 x}$.

L'équation donnée s'écrit alors $2X + \frac{32}{X} = 20 \Leftrightarrow X^2 - 10X + 16 = 0$.

Ça conduit à $4\cos^2 x = 1$ ou $4\cos^2 x = 3$.

Ou encore $\cos x = \frac{\pm 1}{2}$ ou $\cos x = \frac{\pm \sqrt{3}}{2}$.

C'est-à-dire $x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{-\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{-2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x = \frac{-\pi}{6}[2\pi]$ ou $x = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ ou $x = \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$.

On fait un dessin...

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Remarque : la notation utilisée par l'énoncé pour écrire l'ensemble des solutions est totalement défailante !

Une seule bonne réponse : A.

28) Voir que sur les intervalles de définition inclus dans $[0; \pi]$, il s'agit d'une fonction strictement croissante (sur chacun des intervalles de définition).

Les limites aux bornes et la continuité donne une solution à l'équation sur chacun de ces intervalles.

Il ne reste plus qu'à compter les intervalles de définition inclus dans $[0; \pi]$: les valeurs interdites sont au nombre de 9 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right)$, les intervalles sont donc au nombre de 10.

Une seule bonne réponse : D.

29)

Question hors-programme PCSI.

La décomposition en éléments simples est bien au programme, mais seulement pour des dénominateurs de petit degré.

Ici, le mieux est de partir des expressions données aux réponses A, B, C et D, de réduire au même dénominateur et de vérifier si on obtient l'expression donnée dans la question (ce qui est très calculatoire...).

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

- 30) Développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x} = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ et comme $f(0) = 0$, la fonction est continue et dérivable en 0.

Par ailleurs, f n'est clairement pas périodique (à cause du dénominateur égal à x), et est encadrée sur $\mathbb{R}_+$ par 0 et $\frac{\ln(2)}{x}$ donc admet une limite nulle en $+\infty$.

Une seule bonne réponse : B.

- 31) $0 \leq t \leq 1$ donc $0 \leq t^{n+1} \leq t^n \leq 1$

Donc $1 \leq 1 + t^{n+1} \leq 1 + t^n \leq 2$ puis, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{1+t^{n+1}} \leq 1.$$

La suite I_n est donc croissante, bornée, majorée par 1, donc convergente.

Obtenir sa limite est plutôt du ressort du programme de 2ème année, mais on peut s'en tirer avec le programme de première année :

Pour $0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a $0 \leq t^n \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{n}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

$$\text{Donc } I_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{1}{(1+t^n)^2} dt + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{1}{(1+t^n)^2} dt \leq \exp\left(-\frac{2n}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Donc I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Une seule bonne réponse : C.

- 32) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On obtient une formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - \frac{2}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Une seule bonne réponse : B.

- 33) On écrit $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$ puis voir que $\mathcal{C}_f$ est l'image de la représentation graphique de $x \mapsto \frac{2}{x}$ par translation de vecteur $(1; 1)$.

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire, la réponse B est correcte.

Une seule bonne réponse : B.

- 34) DL à l'ordre 2 en 0 de $g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$:

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{x^2}\right) = \exp\left(\frac{-\frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2}\right) = \exp(-1/6) + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

Une seule bonne réponse : B.

- 35) Les réponses B et C sont manifestement fausses (croissances comparées pour B et comparaison à suite arithmétique pour C).

A est un piège : penser à la suite $u_n = -n - 1$.

La réponse D est vraie puisque w tend vers $-\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{w_n} = 0$.

Une seule bonne réponse : D.

36)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B})$ qui permet de calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Puis calculer $\mathbb{P}(B)$.

Plus précisément :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \frac{3}{20}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{25}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{23}{25}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) = \frac{3}{20} + \frac{23}{25} - \frac{3}{5} = \frac{47}{100}$$

Une seule bonne réponse : A.