

Polynômes

I. Structure d'espace vectoriel, exemples

Ex. 14.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$.

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1; P_2; P_3)$.

Ex. 14.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, tous deux à deux distincts.

Soit $P_1 = (X - \alpha)(X - \beta)$, $P_2 = (X - \alpha)(X - \gamma)$ et

$P_3 = (X - \beta)(X - \gamma)$.

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1; P_2; P_3)$.

Ce résultat reste-t-il valable si au moins deux des trois réels α, β, γ sont égaux ?

Ex. 14.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On note ϕ l'application définie sur E par $\phi(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que $\forall P \in E, \phi(P) \in E$.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
3. Montrer que ϕ est une symétrie.
4. Donner les sous-espaces caractéristiques de ϕ .

II. Division euclidienne, racines

Ex. 14.4 À quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Ex. 14.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Soit n un entier naturel. Donner le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Dédire des deux questions précédentes les coefficients de la matrice A^n en fonction de n .

Ex. 14.6 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Exprimer en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Cette formule reste-t-elle valable si $a = b$?

Ex. 14.7 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les restes dans la division euclidienne par $(X - 1)$, $(X - 2)$ et $(X - 3)$ sont respectivement 3, 7 et 13.

Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

1. Déterminer les valeurs de $R(1)$, $R(2)$ et $R(3)$.
2. En déduire l'expression de $R(X)$.

Ex. 14.8 (Cor.) Déterminer les polynômes P dont le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^3$ est 11 et le reste dans la division euclidienne par $(X + 1)^3$ soit -5 .

Ex. 14.9 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est divisible par B pour :

- $A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $B = X - 1$;
- $A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$;
- $A = \cos((n - 1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos\theta X + 1$ et $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

Ex. 14.10 Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Ex. 14.11 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0)^2 + P(1)^2 + P(8)^2 + P(15)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Ex. 14.12 Montrer que $\forall (m; n; p; q) \in \mathbb{N}^4$, $\frac{X^3 + X^2 + X + 1}{X^3 + X^2 + X + 1}$ divise $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

Ex. 14.13 (Cor.) Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte à ce que $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ admette une racine d'ordre 4 dans $\mathbb{R}$.

Ex. 14.14 [*] Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

III. Factorisation, relations coefficients/racines

Ex. 14.15

1. Développer $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2. Montrer que pour tout $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$,
 $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$.
3. Résoudre les systèmes suivants en considérant les inconnues réelles, puis en les considérant complexes :

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

Ex. 14.16 (Cor.) Factoriser $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Ex. 14.17 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Les polynômes P_n sont appelés **Polynômes de Tchebychev**.

1. Calculer les polynômes P_2, P_3, P_4 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le polynôme P_n est bien défini, qu'il est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1} .
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$

4. En déduire que le polynôme P_n admet n racines simples distinctes qui sont :

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

En déduire que le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa factorisation.

Ex. 14.18 Pour chacun des polynômes suivants, trouver une racine évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant :

$$P = X^2 - 7X + 10 \quad Q = 2X^2 + 9X - 11 \quad R = X^2 - 2iX - 1$$

Ex. 14.19 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par :

1. $Q = X - 3$.
2. $Q = (X - 3)(X - 2)$.
3. $Q = (X - 2)^2$.

Ex. 14.20 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^4 - 1 \quad Q = X^4 - 3X^2 - 4 \quad R = X^5 - 1$$

Ex. 14.21 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = 16X^4 - 32X^3 + 24X^2 - 8X + 1 \quad Q = X^4 + 18X^2 + 81$$

Ex. 14.22 (Cor.) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Ex. 14.23 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de $P = (X + 1)^n - e^{2in\alpha}$.
2. En déduire la valeur de $T_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)$

Ex. 14.24 Centrale MP 1999 Soit $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \geq 2$.

Montrer que $(X - a)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X - a)^2$.

Ex. 14.25 CCP PC 1998 Quel est le reste de la division de $\frac{(X^n + 1)^2}{(X^n + 1)^2}$ par $(X + 1)^2$?

IV. Fractions rationnelles

Ex. 14.26 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$. En déduire les éventuelles asymptotes de $x \mapsto f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

Ex. 14.27

- Rappel** : donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$.
- Utiliser une méthode similaire pour donner l'ensemble des primitives de $g : x \mapsto \frac{1}{x^3 - x}$.

Corrections

Cor. 14.8 : Si le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^m$ est R alors $P^{(k)}(a) = R^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket$.

Appliquée aux deux hypothèses de départ et à une division de P par $(X + 1)^3(X - 1)^3 = (X^2 - 1)^3$, cette propriété nous permet d'obtenir directement le résultat demandé.

Écrivons $P = (X^2 - 1)^3Q + aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. Les hypothèses de l'énoncé se réécrivent

$$\begin{cases} P(1) = 11 & = a + b + c + d + e + f \\ P'(1) = 0 & = 5a + 4b + 3c + 2d + e \\ P''(1) = 0 & = 20a + 12b + 6c + 2d \\ P(-1) = -5 & = -a + b - c + d - e + f \\ P'(-1) = 0 & = 5a - 4b + 3c - 2d + e \\ P''(-1) = 0 & = -20a + 12b - 6c + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d + f & = 3 \\ a + c + e & = 8 \\ 5a + 3c + e & = 0 \\ 2b + d & = 0 \\ 6b + d & = 0 \\ 10a + 3c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f & = 3 \\ a + c + e & = 8 \\ 2a + c & = -4 \\ b & = 0 \\ d & = 0 \\ 10a + 3c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f & = 3 \\ e & = 15 \\ a & = 3 \\ b & = 0 \\ d & = 0 \\ c & = -10 \end{cases}$$

Donc $P = (X^2 - 1)^3Q + 3X^5 - 10X^3 + 15X + 3$ où Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 14.13 : P admet une racine $r \in \mathbb{R}$ d'ordre 4 si et seulement si

$$\begin{cases} P(r) & = 0 \\ P'(r) & = 0 \\ P''(r) & = 0 \\ P'''(r) & = 0 \\ P^{(4)}(r) & \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 - 5r^4 + ar^2 + br + c & = 0 \\ 6r^5 - 20r^3 + 2ar + b & = 0 \\ 30r^4 - 60r^2 + 2a & = 0 \\ 120r^3 - 120r & = 0 \\ 3r^2 - 1 & \neq 0 \end{cases}$$

Il y a donc 3 racines possibles : $r = 0$, $r = 1$ ou $r = -1$.

Si $r = 0$, $a = b = c = 0$.

Si $r = 1$, $a = 15$, $b = -16$ et $c = 5$.

Si $r = -1$, $a = 15$, $b = 16$ et $c = 5$.

Cor. 14.16 : $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ possède 3 racines dans $\mathbb{C}$ qui sont, par hypothèse, en progression arithmétique.

Donc, il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que les trois racines puissent s'écrire x_0 , $x_1 = x_0 + r$ et $x_2 = x_1 + r = x_0 + 2r$.

L'idée est d'utiliser le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ pour obtenir un système vérifié par x_0 et r .

Ou de manière équivalente par x_1 et r : ce second système est beaucoup plus facile à résoudre que le premier.

Plus précisément :

$$P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 = 8(X - x_1 + r)(X - x_1)(X - x_1 - r)$$

$$\text{Donc } P = 8X^3 + 8X^2(-3x_1) + 8X(3x_1^2 - r^2) - 8(x_1^3 - r^2x_1).$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ 8(3x_1^2 - r^2) & = -2 \\ 8(x_1^3 - r^2x_1) & = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ r^2 & = 1 \end{cases} \text{ en remplaçant } x_1 \text{ par sa valeur...}$$

Donc $r = \pm 1$, ce qui donne (dans les deux cas) $x_0 = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$ en classant les racines par ordre croissant.

Cor. 14.22 : $P \in \mathbb{C}[X]$ donc P est scindé. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de multiplicité $m > 0$ c'est-à-dire a telle que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

$P' = m(X - a)^{m-1}Q + (X - a)^m Q'$ divise P si et seulement si $mQ + (X - a)Q'$ divise $(X - a)Q$. Or, pour $X = a$, on a $mQ(a) + (a - a)Q'(a) = mQ(a) \neq 0$ et $(a - a)Q(a) = 0$ donc le quotient s'annule en a . De plus, les termes dominants de mQ et $(X - a)Q'$ ne s'annulent pas donc le quotient est de degré 1.

Le quotient de $(X - a)Q$ par $mQ + (X - a)Q'$ est donc de la forme $k(X - a)$ avec

$k \in \mathbb{C}^*$.

On a donc $(X - a)Q = k(X - a)(mQ + (X - a)Q') \Leftrightarrow (1 - km)(X - a)Q = k(X - a)^2 Q' \Leftrightarrow (1 - km)Q = k(X - a)Q'$ et comme $Q(a) \neq 0$, la seule possibilité est $Q' = 0$, $k = \frac{1}{m}$.

Donc les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $P = q(X - a)^m$, avec $a, q \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : si P est un polynôme constant, $P' = 0$ ne divise pas P sauf si $P = 0$. Ce cas est pris en compte dans le résultat donné puisqu'on interdit $m = 0$ (polynômes constants non nuls) mais qu'on autorise $q = 0$ (polynôme nul).