Cor. 2.2 : ***Analyse*** : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f\big(x - f(y)\big) = 2 - x - y$
Notamment, pour y réel quelconque et $x = f(y)$, on a : $f(0) = 2 - f(y) - y$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 - x - f(0)$.
Donc pour $x = 0$, $f(0) = 2 - f(0)$, c'est-à-dire, $f(0) = 1$.
Finalement, si une telle fonction existe, alors elle est unique et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$$

Synthèse : soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x$.
Alors, pour tout réel x, pour tout réel y,
$f(x - f(y)) = 1 - (x - (1 - y)) = 2 - x - y$.
Conclusion : il existe une unique fonction réelle de la variable réelle vérifiant
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f\big(x - f(y)\big) = 2 - x - y$ et cette fonction est
$f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x$

Cor. 2.3 :

1. ***Analyse*** : supposons que G est un sous-espace vectoriel de F.
   Alors $v \in F$, donc $1 - a - b = 0$, c'est-à-dire $a + b = 1$.
   Synthèse : supposons $a + b = 1$.
   Alors $v \in F$, donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v \in F$ puisque F est stable par combinaisons linéaires.
   Donc $G \subset F$, or G est l'espace vectoriel engendré par v, donc G est un sous-espace vectoriel de F.
2. Supposons $a + b \neq 1$.
   Soit $u = (x; y; z) \in F \cap G$.
   $u \in F$ donc $x - y - z = 0$.
   $u \in G$ donc $y = ax$ et $z = bx$.
   Donc $x(1 - a - b) = 0$, donc $x = 0$ (puisque $1 - a - b \neq 0$) donc $u = 0_E$.
   Donc $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = 1 + 1 = 2 : F + G = \mathbb{R}^2$.
   Donc F et G sont supplémentaires.

Cor. 2.4 :

1. A est le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, le produit est donc possible et A est une matrice carrée $n \times n$.
   r est le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit est donc possible et r est une matrice 1×1, c'est-à-dire un nombre réel !
2. Par définition du produit matriciel, $\forall i \in [\![1; n]\!], \forall j \in [\![1; n]\!]$,
   $a_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_{i,k} y_{j,k} = x_i y_j$ puisque X et Y n'ont qu'une seule colonne.
3. De même, $r_{1,1} = r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_{k,1} x_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
4. Soit $k \geqslant 1$.
   $A^k = \underbrace{XY^{\mathrm{T}}XY^{\mathrm{T}}...XY^{\mathrm{T}}}_{k \text{ facteurs } XY^{\mathrm{T}}} = X \underbrace{Y^{\mathrm{T}}X...Y^{\mathrm{T}}X}_{k-1 \text{ facteurs } Y^{\mathrm{T}}X} Y^{\mathrm{T}} = r^{k-1} XY^{\mathrm{T}} = r^{k-1} A$.
   On aurait aussi pu montrer cette identité par récurrence.
5. Procédons par analyse-synthèse :
   Analyse : supposons que $A + I_n$ soit inversible et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son inverse.
   Par définition, $B(A + I_n) = BA + B = I_n$ et $(A + I_n)B = AB + B = I_n$.
   Notamment A et B commutent et $B = I_n - AB = I_n - A\big(I_n - AB\big) = I_n - A + A^2\big(I_n - AB\big) = ...$
   On peut donc conjecturer que $B = I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - ....$
   En utilisant le résultat de la question précédente, on peut par ailleurs affirmer que :
   $I_n - A + A^2 - A^3 + ... + (-1)^p A^p = I_n - \big(A - rA + r^2 A^2 - ... + (-1)^{p-1} r^{p-1} A\big) = I_n - \dfrac{1 - (-r)^p}{1 + r} A$, à condition que $r \neq -1$.
   Synthèse :
   1^er^ cas : supposons $r \neq -1$.

Montrons que $I_n + A$ est inversible et que son inverse est $I_n - \dfrac{1}{1+r}A$.
$(I_n + A)\left(I_n - \dfrac{1}{1+r}A\right) = I_n + A - \dfrac{1}{1+r}A - \dfrac{1}{1+r}A^2 = I_n + \left(1 - \dfrac{1+r}{1+r}\right)A = I_n$ car $A^2 = rA$.
De même, $\left(I_n - \dfrac{1}{1+r}A\right)(I_n + A) = I_n$.
2ème cas : supposons $r = -1$.
Montrons, par l'absurde, que $I_n + A$ n'est pas inversible.
$I_n + A = I_n - A^2$ car $A^2 = -A$.
Donc $I_n + A = (I_n + A)(I_n - A) \qquad (E)$.
Supposons que $I_n + A$ soit inversible et soit B son inverse.
On a donc, en multipliant (E) à gauche par B : $I_n = I_n - A$.
Donc $A = 0_n$ ce qui est absurde puisque, dans ce cas, on aurait aussi $r = 0$.
Donc $I_n + A$ n'est pas inversible.
Conclusion :
$I_n + A$ est inversible si et seulement si $r \neq -1$, et dans ce cas,

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{1+r}A$$

Cor. 2.5 :

Cor. 2.6 : Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. Le système se réécrit :
$\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y & = & a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = & b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} & = & 2a \\ X - \frac{1}{X} + Y - \frac{1}{Y} & = & 2b \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_1-L_2}{2} \end{array} \left\{\begin{array}{lcl} X + Y & = & a+b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} & = & a-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X + Y & = & a+b \\ \frac{Y+X}{XY} & = & a-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X + Y & = & a+b \\ XY & = & \frac{a+b}{a-b} \end{array}\right.$
Or deux nombres r_1, r_2 dont on connaît le produit P et la somme S sont solutions de l'équation $r^2 - Sr + P = 0$ (relations coefficients-racines dans les équations du second degré)
Donc X et Y sont solutions de $r^2 - (a+b)r + \frac{a+b}{a-b} = 0$.
$\Delta = (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}$
Nous cherchons des solutions X et Y réelles strictement positives avec par hypothèses $a > b$ et $XY = \frac{a+b}{a-b} > 0$ donc $b > -a$
$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{b^2+4}$ (car $a = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y > 0$).
$r_1 = \frac{a+b+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $r_2 = \dfrac{a+b-\sqrt{\frac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}}}{2} = \dfrac{(a+b)\left(\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{a^2-b^2-4}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}} > 0$.

Une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que le système ait des solutions est donc

$$a > \sqrt{b^2+4}$$

Cor. 2.7 : ***Analyse*** :
Soit f une solution de l'équation fonctionnelle $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.
Pour $x = 0$, on obtient $f(0) = 1$.
Pour $x = 1$, on obtient $f(1) + f(0) = 2$ donc $f(1) = 1$.
En posant $u = 1 - x$, l'équation fonctionnelle devient $f(1-u) + (1-u)f(u) = 2 - u$, qui doit être vraie pour tout u.
On a donc, pour tout réel x,
$(E_1) : f(x) + xf(1-x) = 1 + x$ et aussi $(E_2) : (1-x)f(x) + f(1-x) = 2 - x$.
$(E_1) - x(E_2)$ donne donc $\left(x^2 - x + 1\right)f(x) = x^2 - x + 1$.
Or, pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$, donc, si une solution existe elle est unique et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$$

Synthèse :
Soit f la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
Vérifions que f est solution de l'équation fonctionnelle donnée :

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \times 1 = 1 + x$.
Conclusion : il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$ et cette fonction est la fonction constante égale à 1.

Cor. 2.8 :

1. F et G sont bien inclus dans E.
   La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique.
   Enfin, étant donnés $A, B \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\left(\lambda A + \mu B\right)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}} = \lambda A + \mu B$, qui est donc symétrique - par caractérisation à l'aide de la transposition.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de E.
   On fait de même pour G.
2. Par analyse-synthèse : on souhaite montrer que $\forall M \in E, \exists! S \in F, \exists! A \in G, M = S + A$ (définition de deux espaces supplémentaires)
   Analyse : supposons que S et A existent, alors
   $M^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} = S - A$
   et $M = S + A$
   Donc $S = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$.
   Donc si S et A existent, alors elles sont uniques et données par les deux expressions précédentes.
   Synthèse : En reprenant les deux expressions obtenues ci-dessus,
   $S + A = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2} + \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2} = M$
   $S^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{M^{\mathrm{T}} + M}{2} = S$
   $A^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{M^{\mathrm{T}} - M}{2} = -A$
   Donc $M = S + A$, S est symétrique et A antisymétrique, ce qu'il fallait démontrer.
   F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
   - la projection p_F sur F parallèlement à G ;
   - la projection p_G sur G parallèlement à F ;
   - la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
3. $p_F(M) = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}, p_G(M) = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $s(M) = M^{\mathrm{T}}$ d'après la question précédente.
   En particulier, nous venons de montrer que la transposition est la symétrie par rapport à l'espace vectoriel des matrices symétriques, parallèlement à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.
4. On cherche les matrices $M \in E$, telles que $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ que nous noterons S.
   Par définition de p_F, on a donc $M = S + A$ où A est antisymétrique. Donc les solutions de cette équation sont les matrices
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & 3+y \\ 2-x & 4 & 5+z \\ 3-y & 5-z & 6 \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Cor. 2.9 : Si $a = 0$, il est nécessaire et suffisant que $|b| = 1$.
Sinon, effectuons une démonstrations par analyse-synthèse :
Analyse : supposons que les solutions de (E), qui sont $z_{1,2} = \dfrac{-a \pm \delta}{2}$ où $\delta^2 = a^2 - 4b$, sont toutes les deux de module égal à 1.
On a donc :
$|z_1|^2 = \dfrac{(a+\delta)\left(\bar{a} + \bar{\delta}\right)}{4} = \dfrac{|a|^2 + |\delta|^2 + 2\mathcal{R}e\left(a\bar{\delta}\right)}{4} = 1$
$|z_2|^2 = \dfrac{(a-\delta)\left(\bar{a} - \bar{\delta}\right)}{4} = \dfrac{|a|^2 + |\delta|^2 - 2\mathcal{R}e\left(a\bar{\delta}\right)}{4} = 1$
La condition $|z_1| = |z_2|$ s'écrit donc $\mathcal{R}e\left(\bar{a}\delta\right) = 0$,
c'est-à-dire $\bar{a}\delta = -a\bar{\delta}$
ou encore $\delta^2\bar{a}^2 \in \mathbb{R}_-$.

Ceci nous donne comme condition nécessaire sur $(a;b)$:

$$\begin{aligned} |a|^4-4b\bar{a}^2\in\mathbb{R}_- &\Leftrightarrow \big(a=0 \ \textbf{ou}\ \exists\lambda\in\mathbb{R}_-, |a|^4-\lambda=4b\bar{a}^2\big)\\ &\Leftrightarrow \big(a=0 \ \textbf{ou}\ \exists\lambda\in\mathbb{R}_-, |a|^4a^2-\lambda a^2=4b|a|^4\big)\\ &\Leftrightarrow \Big(a=0 \ \textbf{ou}\ \exists\lambda\in\mathbb{R}_-, 4b=\Big(1-\tfrac{\lambda}{|a|^4}\Big)a^2\Big)\\ &\Leftrightarrow \big(a=0 \ \textbf{ou}\ \exists r\in[1;+\infty[, 4b=ra^2\big)\end{aligned}$$

Cherchons maintenant r de sorte à ce que les deux solutions soient de module 1.

$|z_{1,2}|^2=\dfrac{|a|^2+|\delta|^2}{4}=\dfrac{|a|^2+(r-1)|a|^2}{4}=\dfrac{r|a|^2}{4}=1$ donc $r=\dfrac{4}{|a|^2}$.

Ceci termine notre analyse : si les solutions de (E) sont toutes les deux de module 1, alors ($a=0$ **et** $|b|=1$) ou $b=\dfrac{a^2}{|a|^2}$.

Synthèse : la condition ($a=0$ **et** $|b|=1$) est manifestement suffisante.

Supposons que $b=\dfrac{a^2}{|a|^2}$.

Alors $\delta^2=a^2-4b=a^2-\dfrac{4a^2}{|a|^2}=\left(1-\dfrac{4}{|a|^2}\right)a^2$.

Donc $\delta=\pm a\sqrt{1-\dfrac{4}{|a|^2}}$ si $|a|\geqslant 2$

et $\delta=\pm ia\sqrt{\dfrac{4}{|a|^2}-1}$ si $0<|a|\leqslant 2$.

On obtient donc $z_{1,2}=\dfrac{-a\pm\delta}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{|a|^2}}}{2}a$ dans le premier cas

et $z_{1,2}=\dfrac{-a\pm\delta}{2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{\dfrac{4}{|a|^2}-1}}{2}a$ dans le second cas.

On vérifie alors que seul le second cas conduit à des racines de module égal à 1, et que la condition nécessaire et suffisante recherchée est donc

$$\left(0<|a|\leq 2\,\textbf{et}\,b=\frac{a^2}{|a|^2}\right)\textbf{ou}\,(a=0\,\textbf{et}\,|b|=1)$$