Maths - Chapitre 15

# Dimension des espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désignera le corps des nombres réels ou des nombres complexes.

## I. Rappels et compléments

### I.1. Rappels

Ce chapitre poursuit et complète le chapitre 12 sur les espaces vectoriels. En conséquence, toutes les définitions et propriétés du chapitre sur les espaces vectoriels doivent être revues. Notamment, on révisera attentivement

- la caractérisation (théorème fondamental 12.5) des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ ;
- les notions de somme et de somme directe de deux sous-espaces vectoriels ;
- la définition 12.13 d'une application linéaire ;
- la définition 12.19 du noyau d'une application linéaire et le théorème 12.20 énonçant les propriétés du noyau d'une application linéaire ou de l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire ;
- la définition et la caractérisation des projections et des symétries...

### I.2. Rappel : combinaisons linéaires

#### Définition 15.1 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de $E$, on dit que $u$ est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** $U$ ou une ***combinaison linéaire de*** $U$ si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

**Proposition 15.2**

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de $E$, ***l'ensemble des combinaisons linéaires de*** $U$ est un sous-espace vectoriel de $E$ appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** $U$.
On le note $\operatorname{Vect} U$.

## I.3. Rappel : espaces vectoriels de référence

Pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, on peut, par exemple, montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
Parmi les espaces vectoriels de référence, nous avons déjà vu :

- l'espace vectoriel des $n$-uplets $\mathbb{K}^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque ;
- l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ;
- l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, où $A \subset \mathbb{R}$ ;
- l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, ou celui des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ noté $\mathbb{K}_n[X]$ ;
- l'espace vectoriel des matrices à $n \in \mathbb{N}^*$ lignes et $p \in \mathbb{N}^*$ colonnes et à coefficients réels ou complexes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ;
- l'espace vectoriel des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels $E$ et $F$.

Mais il existe aussi d'autres méthodes pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel : on peut aussi ..........................................................................................
..........................................................................................
.......................................................

## I.4. Complément : notion d'hyperplan

### Définition 15.3 (Hyperplan)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que $H$ est un ***hyperplan de*** $E$ s'il existe une ***forme linéaire*** non identiquement nulle $f$ définie sur $E$ (c'est-à-dire une .................................) telle que

$$H = \operatorname{Ker}(f)$$

Par exemple, $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et
$B = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 = u_1\right\}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel des suites complexes.

## I.5. Équations linéaires

**Théorème 15.4**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $y$ un vecteur de $F$.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs $x$ solution de l'équation $\phi(x) = y$ est :

- ou bien vide : $\mathcal{S} = \emptyset$ ;
- ou bien la somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker}(\phi)$.

**Démonstration**

### Remarque

Le théorème précédent est le cas général d'une situation que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises :

- Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, où $a$ et $b$ sont deux fonctions continues d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$ : alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle et de la solution générale de l'équation homogène associée.
  En effet, d'une part $\phi : y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto y' + a(x)y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une application linéaire, d'autre part, la méthode de variation de la constante nous garantit qu'il existe toujours une solution particulière à l'équation différentielle.
- Le résultat similaire concernant les équations différentielles $y''+ay'+by = f(x)$ linéaires à coefficients constants se déduit de même du théorème précédent.
- L'ensemble des suites vérifiant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est somme de la suite constante vérifiant la même formule de récurrence (***solution particulière constante*** !) et d'une suite géométrique de raison $a$ (***solution générale de l'équation sans second membre*** !) : ici l'application linéaire est $\phi : u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'équation linéaire est $\phi(u) = b$ où $b$ doit être interprétée comme la suite constante égale à $b$...
  $\phi(u) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$ ce qui donne bien les suites géométriques de raison $a$.
- Enfin, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit somme d'une solution particulière de ce système et de la solution générale du système sans second membre !

**Ex.** 15.1 Soit $u$ la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{array}\right.$

1) Montrer que $\psi : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2) Trouver une suite particulière simple vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$.
3) Déduire des deux question précédentes une formule explicite donnant $u_n$ en fonction de $n$.

**Cor. 15.1**

**Ex.** 15.2 Soit $\phi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{3}; \dfrac{2x+2y}{3}\right) \end{array}\right.$

1) Montrer que $\phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Nature géométrique de $\phi$ ?
3) Résoudre les équations $\phi(x;y) = (-2;-4)$ et $\phi(x;y) = (0;1)$.

**Cor. 15.2**

# II. Familles finies de vecteurs

## II.1. Famille libre, famille liée

### Définition 15.5

On dit qu'une famille de vecteurs est ***liée*** si l'un des vecteurs de la famille est une ***combinaison linéaire des autres vecteurs***.
Dans le cas contraire on dit que la famille est ***libre***.

### Remarque

La notion de ***famille liée***, nous le verrons, généralise les notions de ***famille de 2 vecteurs colinéaires***, ou de ***famille de 3 vecteurs coplanaires***.
Dans le cas général, on parlera donc de ***famille liée***.

**Proposition 15.6**

Une famille de vecteurs est libre si et seulement si il existe une unique combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille.

**Démonstration**

**Méthode**

En pratique, pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est libre on écrira donc
« ***Supposons que*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ ***et montrons que*** $\forall i \in [\![1; n]\!], \lambda_i = 0$. »
et pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est liée on écrira
« ***Montrons qu'il existe des solutions*** $(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ ***non toutes nulles à l'équation*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ »
Dans les deux cas, on résout un système : s'il existe une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, la famille est libre, sinon la famille est liée.

**Ex.** 15.3 • La famille $((2; -1); (1; 2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ?

........................................................................................................

........................................................................................................

• La famille $(X^2 + 3X + 1; X^2 - 3X + 1; X^2 + X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ?

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

**Propriété 15.7**

- Toute famille finie contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille composée d'un unique vecteur non nul est libre.

- Toute famille libre $A$ à laquelle on adjoint un vecteur $v \notin \operatorname{Vect} A$ est libre.

**Démonstration**

## Définition 15.8

On dit que deux vecteurs $u$ et $v$ sont colinéaires ou que trois vecteurs $u$, $v$ et $w$ sont coplanaires si et seulement si ils forment une famille liée.

**Ex.** 15.4 Montrer que $(\cos; \sin)$ est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$.
Étant donnés $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ***distincts***, montrer que $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto e^{c_2 x})$ est une famille libre.
Même question pour $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto x e^{c_1 x})$.

**Cor. 15.4**

### II.2. Famille génératrice

## Définition 15.9

On dit qu'une famille $A$ de vecteurs de $E$ est ***génératrice*** si $\operatorname{Vect} A = E$.

**Méthode**

Pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est génératrice on écrira donc

« ***Soit*** $v$ ***un vecteur de*** $E$***, montrons qu'il existe*** $(\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ ***tels que*** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = v$***.*** »

et il s'agira encore de résoudre un système d'équations linéaires.

**Ex.** 15.5 • La famille $((2; -1); (1; 2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle génératrice ?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

- La famille $(X^2 + 3X + 1; X^2 - 3X + 1; X^2 + X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle génératrice ?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 15.10**

- Si $(u_1; u_2; ...; u_n)$ est génératrice alors $\forall v \in E$, $(u_1; u_2; ...; u_n; v)$ est génératrice.
- Si $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est ***génératrice et liée*** alors on peut trouver une sous-famille génératrice de $n - 1$ vecteurs de $A$.

**Démonstration**

## II.3. Base

### Définition 15.11

On dit qu'une famille $A$ de vecteurs est ***une base*** de $E$ si elle est ***libre et génératrice***.

**Ex.** 15.6 • La famille $((2;-1);(1;2))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$ ?

.........................................................................................................

.........................................................................................................

• La famille $(X^2+3X+1; X^2-3X+1; X^2+X+1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ?

.........................................................................................................

**Théorème 15.12 (Unicité de la décomposition dans une base)**

Si $A=(u_1;u_2;...;u_n)$ est une base de $E$ alors $\forall v\in E, \exists!\,(\lambda_1;...;\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, v=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$.

**Démonstration**

### Définition 15.13

Si $A=(u_1;u_2;...;u_n)$ est une base de $E$, pour tout vecteur $v\in E$, les scalaires $(\lambda_1;...;\lambda_n)$ tels que $v=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$ sont appelés ***coordonnées de*** $v$ ***dans*** $A$.

### Important !

Les coordonnées d'un vecteur sont ***valables dans une base*** ! Si on change un seul vecteur de la base, il ***est possible que toutes les coordonnées changent*** !

**Ex.** 15.7 Quelles sont les coordonnées du vecteur $v=(3;2)$ dans la base $((1;0);(1;2))$ de $\mathbb{R}^2$ ?

.........................................................................................................

**Ex.** 15.8 Donner une base $\mathcal{B}$ de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E)$ : $y''+2y'+2y=0$.
Montrer que $f : x\in\mathbb{R}\mapsto e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ est une solution de $(E)$.
Quelles sont les coordonnées de $f$ dans $\mathcal{B}$ ?

**Cor. 15.8**

## II.4. Famille de polynômes échelonnée en degrés

### Définition 15.14

On dit qu'une famille $(P_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est ***échelonnée en degrés*** si

$$\forall i\in[\![1;p-1]\!], \deg P_i<\deg P_{i+1}$$

**Propriété 15.15**

Toute famille de polynômes échelonnée en degrés ne contenant pas le polynôme nul est libre.

**Démonstration**

## II.5. Bases et sommes directes

### Définition 15.16 (Base adaptée à une somme directe)

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$ et $\mathcal{B}=(e_1;e_2;...;e_n)$ une base de $E$.
$F$ et $G$ étant supplémentaires dans $E$, on a donc $E=F\oplus G$.
On dit de $\mathcal{B}$ qu'elle est ***adaptée à cette somme directe*** si il existe $k\in[\![1;n]\!]$ tel que
$\mathcal{B}_1=(e_1;...;e_k)$ soit une base de $F$,
$\mathcal{B}_2=(e_{k+1};...;e_n)$ soit une base de $G$.

### Remarque

Il existe des bases de $F\oplus G$ qui ne sont pas adaptées à cette somme directe. Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2,+,.)$, $F=\text{Vect}((1;-1))$ et $G=\text{Vect}((1;1))$ sont supplémentaires mais la base canonique de $\mathbb{R}^2$ n'est pas adaptée à $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.

**Ex.** 15.9 Montrer que les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de la remarque précédente sont effectivement supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

**Cor. 15.9**

**Proposition 15.17 (Propriété de génération de la somme)**

Soient $k,n$ deux entiers naturels tels que $1\leqslant k<n$.
Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F}=(e_1;...;e_k;e_{k+1};...;e_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors :

- $\text{Vect}\,(e_1;...;e_k;e_{k+1};...;e_n)=\text{Vect}\,(e_1;...;e_k)+\text{Vect}\,(e_{k+1};...;e_n)$
- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\text{Vect}\big(\mathcal{F}\big)=\text{Vect}\,(e_1;...;e_k)\oplus\text{Vect}\,(e_{k+1};...;e_n)$.

**Démonstration**

**Méthode : Somme de sous-espaces vectoriels engendrés**

La première égalité du théorème précédent s'utilise dans les deux sens :

- De droite à gauche : on utilisera cette propriété pour « simplifier » certaines sommes de sous-espaces vectoriels.
  Notamment, lorsqu'on a affaire à la somme de deux sous-espaces vectoriels, il ***peut être très utile d'exprimer ces sous-espaces vectoriels comme des sous-espaces***

***engendrés par une famille***.

- De gauche à droite : on utilisera cette propriété pour montrer qu'une base est adaptée à une somme directe ou pour décomposer un vecteur sur deux sous-espaces vectoriels. Notamment, en poursuivant la décomposition jusqu'au bout, $\text{Vect}\,(e_1; ...; e_n) = \text{Vect}(e_1) + ... + \text{Vect}(e_n)$.

**Ex.** 15.10 Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\big((0; 0; 1)\big)$.

1) Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, puis montrer qu'ils sont supplémentaires.
2) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

**Cor. 15.10**

## III. Espaces vectoriels de dimension finie

### III.1. Dimension finie

### Définition 15.18

On dit qu'un espace vectoriel est de ***dimension infinie*** s'il n'admet aucune famille génératrice finie.

Au contraire, s'il admet une famille génératrice finie, alors l'espace vectoriel est dit de ***dimension finie***.

**Ex.** 15.11 Montrer que l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

**Cor. 15.11**

Dans tout ce qui suit $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

### III.2. Obtention d'une base à partir d'une famille génératrice

**Théorème 15.19 (Théorème de la base extraite)**

De toute famille génératrice finie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel non nul $E$, on peut extraire une base de $E$.

**Démonstration**

**Corollaire 15.20**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

## III.3. Obtention d'une base à partir d'une famille libre

**Théorème 15.21 (Théorème de la base incomplète)**

Toute famille libre d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie peut être complétée en une base.

**Démonstration**

### Remarque

La démonstration que nous venons de faire garantit un résultat légèrement plus fort que celui de l'énoncé puisque nous avons démontré :

1) que toute famille libre d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie peut être complétée en une base ;
2) que les vecteurs utilisés pour compléter la famille libre peuvent être choisis dans une famille génératrice arbitraire de $E$.

**Méthode : Obtention d'une base à partir d'une famille libre/génératrice**

Pour compléter une famille libre $\mathcal{F}$ en une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie :

- on se donne une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de $E$ (qui en possède une puisqu'il est ... ...............) ;
- pour chaque vecteur $v$ de $\mathcal{G}$, on complète la famille $\mathcal{F}$ par $v$ et on vérifie si la nouvelle famille ainsi formée est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur $v$.

Pour extraire une base d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ :

- on part de la famille vide $\mathcal{F}$ ;
- pour chaque vecteur $v$ de $\mathcal{G}$, on complète $\mathcal{F}$ avec ce vecteur et on vérifie si la nouvelle famille est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur $v$.

**Ex.** 15.12 Extraire de la famille $\mathcal{G} = ((1;2;3);(-1;0;1);(1;1;1);(2;1;0);(1;0;0))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

**Cor. 15.12**

## III.4. Lemmes

**Lemme 15.22**

Soient $v$ un vecteur, $n \in \mathbb{N}$ et $(u_1;...;u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs. On a l'équivalence

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1;...;u_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, v - \lambda u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1;...;u_n)$$

**Démonstration**

**Lemme 15.23 (Lemme fondamental)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille de $n+1$ vecteurs de $E$ s'écrivant comme combinaisons linéaires de $n$ vecteurs de $E$ est liée.

**Démonstration**

### III.5. Dimension d'un espace vectoriel

**Théorème 15.24 (Théorème de la dimension)**

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.

1) Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de $E$.
2) Si $\mathcal{B}' = \left(e'_i\right)_{i \in [\![1;n']\!]}$ est une autre base de $E$, alors $n = n'$.

**Démonstration**

**Corollaire 15.25**

Toutes les bases d'un espace vectoriel non nul (de dimension finie) ont le même nombre de vecteurs.

### Définition 15.26 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle ***dimension de*** $E$

- l'entier 0 si $E = \{0_E\}$ ;
- le nombre de vecteurs d'une base quelconque de $E$ sinon.

### Notation

On note $\dim E$ la dimension d'un espace vectoriel.

**Ex.** 15.13 Quelle est la dimension des espaces vectoriels suivants :

1) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$ ?
2) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$ ?
3) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, .)$ ?
4) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, .)$ ?

**Cor. 15.13**

### Définition 15.27

On appelle ***espace vectoriel trivial*** tout espace vectoriel de dimension 0.

On appelle ***droite vectorielle*** tout espace vectoriel de dimension 1.

On appelle ***plan vectoriel*** tout espace vectoriel de dimension 2.

## III.6. Propriétés

**Propriété 15.28**

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

- toute famille génératrice possède au moins $n$ vecteurs ;
- toute famille libre possède au plus $n$ vecteurs.

**Démonstration**

**Propriété 15.29**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n$ vecteur(s) de $E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ est une base de $E$ ;
2) $\mathcal{F}$ est une famille libre ;
3) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice.

**Démonstration**

**Ex.** 15.14 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \big((X-1)(X-2); (X-1)(X+1); (X+1)(X-2)\big)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $E$.
2) Soit $P = a + bX + cX^2$ un polynôme (quelconque) de $E$.
   Donner ses coordonnées dans la base canonique.
   Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

**Cor. 15.14**

**Ex.** 15.15 On considère l'équation différentielle $(E) : x^3y' - 2y = 0$.

1) Donner l'ensemble des solutions de $(E)$ à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Donner une base de l'ensemble des solutions définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$.

**Cor. 15.15**

## III.7. Bases canoniques

### Définition 15.30 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle ***base canonique de*** $\mathbb{K}^n$ la base formée des $n$-uplets de la forme $e_i = \left( \underbrace{0;...;0}_{(i-1)\text{ zéros}} ; 1; \underbrace{0;...;0}_{(n-i)\text{ zéros}} \right)$.
La base canonique de $\mathbb{K}^n$ comporte donc $n$ vecteur(s).

### Remarque

La base canonique définie ci-dessus est une base !

- ***C'est une famille génératrice*** :

  ..........................................................................

- ***C'est une famille libre*** :

  ..........................................................................

En conséquence, $\mathbb{K}^n$ est de dimension ..

### Définition 15.31 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$)

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$.
Il s'agit bien d'une base car :

- ......................................................................................................

  ..........

- ...................................................................

En conséquence, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension .......

### Définition 15.32 (Rappel : base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

On appelle base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ où pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et tout $j \in [\![1;p]\!]$, $E_{ij}$ est défini par

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{0} & \phantom{\cdots} & j & \phantom{\cdots} & \phantom{0} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Il s'agit bien d'une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car :

- ......................................................................................................

$$M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}^{n} m_{i,j} E_{ij} ;$$

- ..............................................................................................

En conséquence, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension ....

## III.8. Rang d'une famille finie

### Définition 15.33

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de ***dimension quelconque*** (finie ou infinie) et $\mathcal{F}$ une famille ***finie*** de vecteurs de $E$.
On appelle ***rang*** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

### Notation

On note $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ le rang de la famille $\mathcal{F}$.

**Théorème 15.34**

Une famille finie de vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qui la composent.

**Démonstration**

**Méthode**

Pour déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs on peut utiliser l'algorithme suivant :

- ***Initialisation*** : on élimine de la famille $\mathcal{F}$ tous les vecteurs nuls et on constitue une sous-famille $\mathcal{F}'$ formée du premier vecteur restant ;
- ***Hérédité*** : pour chaque vecteur $v$ de $\mathcal{F}$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}'$, on vérifie si $v$ n'appartient pas à $\operatorname{Vect} \mathcal{F}'$. Si c'est le cas, on adjoint $v$ à $\mathcal{F}'$.
- ***Terminaison*** : on s'arrête quand tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ ont été traités.

**Ex.** 15.16 Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$\vec{a} = (1, 2, 3, 4), \vec{b} = (1, 1, 1, 3), \vec{c} = (2, 1, 0, 5), \vec{d} = (1, 3, 1, -1), \vec{e} = (2, 3, 0, 1)$$

et $U = \operatorname{Vect}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ et $V = \operatorname{Vect}\left(\vec{d}, \vec{e}\right)$.
Quelles sont les dimensions de $U$, $V$, $U \cap V$ et $U + V$ ?

**Cor. 15.16**

# IV. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

## IV.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Proposition 15.35**

Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

**Démonstration**

**Ex.** 15.17 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ? Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z = 0\}$. Donner une base de $G$. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

## IV.2. Supplémentaire d'un espace vectoriel

**Proposition 15.36**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1) Il existe un supplémentaire $G$ de $F$ dans $E$, autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ tel que $F \oplus G = E$.
2) Si $F$ est non trivial (c'est-à-dire $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$), alors la réunion de toute base de $F$ avec toute base d'un supplémentaire $G$ de $F$ dans $E$ est une base de $E$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

**Démonstration**

**Proposition 15.37**

$F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie si et seulement si $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim F + \dim G &= \dim E \end{cases}$

**Démonstration**

## IV.3. Formule de Grassmann

**Proposition 15.38**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

**Démonstration**

## V. Applications linéaires en dimension finie

Dans tout ce paragraphe, $E$ et $F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

### V.1. Définition à l'aide d'une base de l'espace de départ

**Théorème 15.39**

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base $E$ et $\mathcal{F} = (v_1; v_2; ...; v_n)$ ***une famille quelconque de vecteurs de*** $F$, il existe ***une unique application linéaire*** $\phi$ telle que
$\forall k \in [\![1; n]\!], \phi(u_k) = v_k$.

**Démonstration**

**Remarque**

Le théorème précédent signifie qu'***en dimension finie, il suffit de donner les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ pour définir entièrement une application linéaire***.

**Ex.** 15.18 (Cor.)
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Quelle est l'image par $\phi$ du vecteur $(-1;2)$ ?...........................................................
Quelle est l'image par $\phi$ du vecteur $(x;y)$ ?...........................................................

**Corollaire 15.40**

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à $E_1$ et à $E_2$.

### V.2. Image d'une famille par une application linéaire

**Définition 15.41 (Image d'une famille par une application linéaire)**

Étant données une famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de $E$ et une application linéaire $f : E \to F$, on appelle ***image de la famille*** $\mathcal{E}$ ***par*** $f$ la famille des images par $f$ des vecteurs de $\mathcal{E}$.

Autrement dit, l'image de la famille $\mathcal{E}$ est la famille de vecteurs de $F$ définie par

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = (f(e_i))_{i\in[\![1;n]\!]}$$

## Notation

On note $f(\mathcal{E})$ l'image de la famille $\mathcal{E}$ par $f$.

**Proposition 15.42 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire)**

Étant donnée une application linéaire $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille génératrice de*** $E$, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille génératrice de*** $\operatorname{Im} f$.

**Démonstration**

**Corollaire 15.43**

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base $E$ et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\operatorname{Im}\phi$ est le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par $(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$ :

$$\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$$

**Corollaire 15.44**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant \min(\dim E, \dim F)$$

**Démonstration**

**Proposition 15.45 (Image d'une famille libre par une injection linéaire)**

Étant donnée une application linéaire ***injective*** $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille libre de*** $E$, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille libre de*** $F$.

**Démonstration**

**Proposition 15.46 (Image d'une base par un isomorphisme)**

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ ***une base de*** $E$ et $f : E \to F$ une application linéaire.
$f$ est un ***bijective*** si et seulement si $f(\mathcal{E})$ est ***une base de*** $F$.

**Démonstration**

**Corollaire 15.47**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un isomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ ;
- $\dim E = \dim F$.

$E$ et $F$ sont alors dits isomorphes.

**Démonstration**

### V.3. Rang d'une application linéaire

## Définition 15.48

On appelle ***rang d'une application linéaire*** entre deux espaces vectoriels de dimension finie ***la dimension de son image***.

## Notation

On note : $\operatorname{rg} \phi = \dim \operatorname{Im} \phi$.

## Remarque

Le rang d'une application linéaire $\phi$ est d'après le corollaire 15.43 le rang de la famille des images par $\phi$ des vecteurs d'une base de son espace de départ.

**Propriété 15.49**

Soient $E, F, G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

**Démonstration**

**Propriété 15.50**

Soient $E, F, G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Si $u$ est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
Si $v$ est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

**Démonstration**

**Théorème 15.51 (Formule du rang)**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et

$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi$$

**Démonstration**

**Corollaire 15.52 (Dimension d'un hyperplan)**

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie et $H$ un hyperplan de $E$. Alors

$$\dim H = \dim E - 1$$

## V.4. Caractérisation des isomorphismes

**Théorème 15.53**

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\phi \text{ injective} \Leftrightarrow \phi \text{ surjective} \Leftrightarrow \phi \text{ bijective}$$

**Démonstration**

**Ex.** 15.19 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1) Montrer que $\phi$ est linéaire.
2) Montrer que $\deg \phi(P) = \deg P$.
3) Montrer que $\phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) On note $B_i$ l'image réciproque par $\phi$ de $X^i$.
   Calculer $B_0, B_1, B_2, B_3$.
5) Montrer que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $B_i(X + 1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
6) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée pour $p \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.

## V.5. Exemple : suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Nous allons démontrer le théorème 9.32 dans le cas complexe. La démonstration est similaire dans le cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs réelles.

**Proposition 15.54**

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où $z_1, z_2$ sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$ ;

- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où $z_0$ est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu)z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)z_0 = (\lambda + u_0)z_0$.

**Démonstration**

## VI. Correction des exercices

**Cor.** 15.18 :

$\phi(-1;2) = -\phi(1;0) + 2\phi(0;1) = -\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{3}+2}{2}\right)$

$\phi(x;y) = x\phi(1;0) + y\phi(0;1) = x\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x-y\sqrt{3}}{2}; \frac{x\sqrt{3}+y}{2}\right)$

**Cor.** 15.19 :

1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $P$ et $Q$ deux polynômes de $E$.
Soient $\lambda, \mu$ deux constantes.
$\phi(\lambda P + \mu Q) = \displaystyle\int_X^{X+1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t + \mu \int_X^{X+1} Q(t)\mathrm{d}t$.
Donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $E$, avec $p = \deg(P)$.
Par linéarité, $\phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)$. Il suffit donc de démontrer que $\deg(\phi(X^k)) = k$.
En effet, en supposant ce dernier résultat vérifié, on a alors :
$\deg\phi(P) = \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)\right) = p$ car le degré d'une somme est égal au maximum des degrés dans le cas où les termes de la somme sont de degrés distincts.
Montrons donc que $\forall k \in [\![0;n]\!], \deg(\phi(X^k)) = k$ :
$\phi(X^k) = \displaystyle\int_X^{X+1} t^k\mathrm{d}t = \frac{(X+1)^{k+1} - X^{k+1}}{k+1}$.
D'où, en utilisant la formule du binôme, $\phi(X^k) = \frac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}X^i$ qui est de degré $k$.

3) $\phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque elle est linéaire et que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est injective (propriété 15.52 du cours sur la caractérisation des isomorphismes en dimension finie).
Calculons $\operatorname{Ker}\phi$ : soit $P$ un polynôme tel que $\phi(P) = 0$. On a alors $\deg\phi(P) = -\infty = \deg(P)$ donc $P = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, $\phi$ est un endomorphisme injectif, donc bijectif : c'est un automorphisme.

4) On cherche $B_0$ tel que $\phi(B_0) = 1$. Notamment, $B_0$ est de degré 0 (d'après la question 2).
$\phi(a) = aX + a - aX = a$ donc $B_0 = 1$.
On utilise le même raisonnement pour calculer les autres polynômes :
$\phi(aX + b) = a\dfrac{X^2 + 2X + 1 - X^2}{2} + b = aX + \dfrac{a + 2b}{2} = X$.

Donc $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

$\phi(aX^2 + bX + c) = a\dfrac{X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3}{3} + bX + \dfrac{b + 2c}{2}$

$\phi(aX^2 + bX + c) = aX^2 + (a + b)X + \dfrac{2a + 3b + 6c}{6} = X^2$.

Donc $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.

Enfin,

$\phi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = a\dfrac{X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - X^4}{4} + bX^2 + (b+c)X + \dfrac{2b + 3c + 6d}{6}$

$\phi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = aX^3 + \dfrac{3a + 2b}{2}X^2 + (a + b + c)X + \dfrac{3a + 4b + 6c + 12d}{12} = X^3$.

Donc $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ après calcul.

5) C'est probablement la question la plus difficile : soit $i \in [\![0; n]\!]$ et $Q_i$ un polynôme primitif de $B_i$, autrement dit $Q_i$ tel que $Q_i' = B_i$.

On sait que $\phi(B_i) = X^i$ par définition des polynômes $B_i$.

Or $\phi(B_i) = Q_i(X + 1) - Q_i(X)$ par définition de $\phi$.

Donc, $Q_i(X + 1) - Q_i(X) = X^i$ et en dérivant, $B_i(X + 1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} 3k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} B_3(k + 1) - B_3(k) = \frac{B_3(p + 1) - B_3(1)}{3}$ par télescopage.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p^3 - \frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - 0}{3} = \frac{p\,(2p^2 - 3p + 1)}{6} = \frac{p(p + 1)(2p + 1)}{6}$.