Maths - DM n°2 - Pour le lundi 13 novembre,

Bijections et dérivation

Remarque

Le premier exercice fait appel au théorème 5.26 de dérivation de la bijections réciproque (d'une fonction bijective dérivable sur un intervalle).

On prendra le plus grand soin à justifier l'utilisation de ce théorème.

Le second exercice fait appel aux résultats du premier exercice : on pourra admettre tous les résultats donnés dans le premier pour traiter le deuxième. Cependant, certaines questions ne pourront être faites que si on a correctement traité le premier exercice.

Exercice 1.

Arguments des sinus et cosinus hyperboliques

1) Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{ch} : [0; +\infty[\to [1; +\infty[$ sont bijectives.
   On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$.
3) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\, x) = \sqrt{x^2-1}$.
4) Calculer (en précisant les conditions d'existence) $\mathrm{Argsh}'(x)$ et $\mathrm{Argch}'(x)$.
5) Faire le même travail pour la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.
   On montrera notamment que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1; 1[$ dont la bijection réciproque est notée Argth.
6) Montrer que lorsqu'elle est définie $\mathrm{Argth}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
7) Donner une expression (similaire à celle de la question précédente) pour $\mathrm{Argch}(x)$ et $\mathrm{Argsh}(x)$ en précisant les valeurs de x pour lesquelles ces expressions sont valides.

Exercice 2.

Gudermannien On définit les fonctions th, Argsh, Argch et Argth de la même façon qu'à l'exercice 1. dont les résultats peuvent être admis ici.

Soient $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et Gd la fonction définie par

$$\mathrm{Gd} : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{cases}.$$

1) Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:
   $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x) = \mathrm{Argth}(\sin x) = 2\,\mathrm{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.
3) Calculer Gd' et tracer l'allure de la représentation graphique de Gd.
4) Justifier l'existence de Gd^{-1} et montrer que sur son ensemble de définition $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}\, x)$. Calculer la dérivée de Gd^{-1}.