Dimension des espaces vectoriels

I. Rappels

Ex. 15.1 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et l'ensemble F des suites réelles convergentes et G l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Montrer que $(G, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   Est-ce aussi le cas des suites réelles convergeant vers 1 ?
2. Montrer que $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de G dans F.

Ex. 15.2 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
   F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
   - la projection p_F sur F parallèlement à G ;
   - la projection p_G sur G parallèlement à F ;
   - la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
3. Soit $M \in E$ une matrice quelconque. Exprimer $p_F(M), p_G(M)$ et $s(M)$ à l'aide de M et M^{T}.
4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
   Résoudre l'équation $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

II. Familles

Ex. 15.3 Exhiber une famille génératrice des sous-espaces vectoriels
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y\}$ et
$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + 2z = y - 3t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
Sont-ils supplémentaires ?

Ex. 15.4 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 15.5 Déterminer dans chaque cas si les familles sont libres ou non :

- dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \big((9; -3; 7); (1; 8; 8); (5; -5; 1)\big)$;
- dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
  $\mathcal{G} = \big((1 + i; i); (1 - 3i; 2 + 2i)\big)$.

Ex. 15.6 Montrer que les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ $x \mapsto 1$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'elles forment une famille libre).

Ex. 15.7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; -1)$ et $\vec{e}_3 = (2; 1; 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{u} = (4; -1; 1)$?
3. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{v} = (x, y, z)$?

Ex. 15.8 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$ forment une base de E.

Ex. 15.9 Justifier que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = 3z + 2t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Ex. 15.10 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in E, m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2} = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

III. Espaces vectoriels de dimension finie

Ex. 15.11 (Cor.) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
On note F l'ensemble des fonctions de E qui sont bornées, G l'ensemble des fonctions de E qui sont monotones et H l'ensemble des combinaisons linéaires des trois fonctions ch, sh, exp.

1. Examiner si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Quelle est la dimension de H ?

Ex. 15.12 Après avoir démontré que c'est une famille libre, compléter $(X^2; (X+1)^2)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex. 15.13 (Cor.)

1. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \big((i; 1+i); (-1; -1+i); (2-i; 1-3i)\big)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, étant donné $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = \big((m-1; 1); (-2; m-4)\big)$.

Ex. 15.14 On considère l'équation différentielle

$$(E) : (x-1)^3 y' - 2y = 0$$

1. Résoudre (E) sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.

Ex. 15.15 On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ (avec $p \leqslant n$, $q \leqslant n$).

1. Rappeler la formule de Grassmann.
2. Montrer que $\max(p; q) \leqslant \dim(F+G) \leqslant \min(n; p+q)$.
3. Montrer que $\max(p+q-n; 0) \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \min(p; q)$.

IV. Applications linéaires en dimension finie

Ex. 15.16 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E et déterminer leur noyau et leur image :
(1) $P \mapsto X.P'$ (2) $P \mapsto P - P'$ (3) $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

Ex. 15.17 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $\left\{\begin{array}{lcl} f(\vec{\imath}) & = & 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) & = & 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \end{array}\right.$.
Déterminer $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$, le noyau et l'image de f.

Ex. 15.18 Soit
$f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto & (x+2y+3z; 4x+5y+6z; 7x+8y+9z) \end{array}\right.$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
2. En déduire $\operatorname{rg} f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Ex. 15.19 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$P \mapsto (X+1)P'$$

Montrer que ϕ est linéaire et préciser une base de son image et de son noyau.

Ex. 15.20 Soit $\phi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0); P(1)) \end{array}\right.$.
Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 15.21 **Extrait d'oral Centrale PSI**
Soient $p : x \mapsto e^x \cos x$, $q : x \mapsto e^x \sin x$, $r : x \mapsto e^{-x} \cos x$ et $s : x \mapsto e^{-x} \sin x$.
On considère $E = \operatorname{Vect}(p, q, r, s)$ et $D : \left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & D(f) = f' \end{array}\right.$.

- Montrer que D est une application linéaire.

- Déterminer le noyau et l'image de D.
  D est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que la restriction de D à E est un endomorphisme.
- Quels sont le noyau et l'image de $D_{|E}$? Est-elle bijective ?
- Obtenir l'ensemble des primitives de p, q, r et s.
- Résoudre $y'' - y = e^x \sin(x) + 2e^{-x}\cos(x)$.

Ex. 15.22 [**] Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F,G), v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \mathrm{Ker}(u) = n - p$ et $\dim F = r$.
   A. Justifier l'existence d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que $(e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?
   B. Pour tout $1 \le i \le p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\le i\le p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   C. On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\le i\le r}$ soit une base de F.
   On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si} \quad 1 \le i \le p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que, si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

Corrections

Cor. 15.2 :

1. F et G sont bien inclus dans E.
   La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique.
   Enfin, étant donnés $A, B \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}} = \lambda A + \mu B$, qui est donc symétrique - par caractérisation à l'aide de la transposition.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de E.
   On fait de même pour G.
2. Par analyse-synthèse : on souhaite montrer que $\forall M \in E, \exists! S \in F, \exists! A \in G, M = S + A$ (définition de deux espaces supplémentaires)
   Analyse : supposons que S et A existent, alors
   $M^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} = S - A$
   et $M = S + A$
   Donc $S = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$.
   Donc si S et A existent, alors elles sont uniques et données par les deux expressions précédentes.
   Synthèse : En reprenant les deux expressions obtenues ci-dessus,
   $S + A = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2} + \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2} = M$
   $S^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{M^{\mathrm{T}} + M}{2} = S$
   $A^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{M^{\mathrm{T}} - M}{2} = -A$
   Donc $M = S + A$, S est symétrique et A antisymétrique, ce qu'il fallait démontrer.
   F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
   - la projection p_F sur F parallèlement à G ;
   - la projection p_G sur G parallèlement à F ;
   - la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
3. $p_F(M) = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}, p_G(M) = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $s(M) = M^{\mathrm{T}}$ d'après la question précédente.
   En particulier, nous venons de montrer que la transposition est la symétrie par rapport à l'espace vectoriel des matrices symétriques, parallèlement à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.
4. On cherche les matrices $M \in E$, telles que $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ que nous noterons S.
   Par définition de p_F, on a donc $M = S + A$ où A est antisymétrique. Donc

les solutions de cette équation sont les matrices

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2+x & 3+y\\ 2-x & 4 & 5+z\\ 3-y & 5-z & 6\end{pmatrix},(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Cor. 15.4 : Notons $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}\,(u_1,u_2)$ et $G=\text{Vect}\,(e_1,e_2)$. Démontrons que $F=G$ par double inclusion :

- $F\subset G$: soit $u=\lambda u_1+\mu u_2\in F$. Montrons que $u\in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y)\in G$ tels que $u=xe_1+ye_2$. Cherchons donc $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1)=x(3;2;2)+y(0;1;1)\iff\left\{\begin{array}{lcl}\lambda+\mu&=&3x\\ \mu&=&2x+y\\ \mu&=&2x+y\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\dfrac{\lambda+\mu}{3}\\ y&=&\dfrac{\mu-2\lambda}{3}\end{array}\right.$$

  Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F\subset G$.
- $G\subset F$

  1ère méthode : en utilisant les dimensions.

  On vérifie facilement que les familles (u_1,u_2) et (e_1,e_2) sont libres - les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F=\dim G=2$. ***Or $F\subset G$ donc F est un sous-espace vectoriel de G.*** Et comme leurs dimensions sont égales, $F=G$.

  2ème méthode : on démontre l'inclusion réciproque.

  Soit $e=xe_1+ye_2\in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $e=\lambda u_1+\mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1)=x(3;2;2)+y(0;1;1)\iff\left\{\begin{array}{lcl}\lambda+\mu&=&3x\\ \mu&=&2x+y\\ \mu&=&2x+y\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}\lambda&=&x-y\\ \mu&=&2x+y\end{array}\right.$$

  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G\subset F$.

  Comme $F\subset G$ et $G\subset F$, on conclut que $F=G$.

Cor. 15.11 :

1. F est un sous-espace vectoriel de E : l'inclusion est évidente, la fonction nulle est bornée, et toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.

   G n'est pas un sous-espace vectoriel de E : en effet, $f:x\mapsto x^3$ est croissante donc monotone, $g:x\mapsto x$ aussi mais
   $f-g:x\mapsto x^3-x$ n'est pas monotone puisque sa dérivée $f'-g':x\mapsto 3x^2-1$ est négative en 0 et positive en 1.

   $H=\text{Vect}\big(\text{ch},\text{sh},\exp\big)$ donc est un sous-espace vectoriel de E.
2. La famille (sh) est libre car composée d'un unique vecteur non nul.

   La famille (sh; ch) est libre aussi : en effet, cherchons λ,μ tels que $\lambda\,\text{sh}+\mu\,\text{ch}=0$.

   Alors, évalué en $x=0$, on a $\mu=0$.

   Et en $x=1$, on obtient $\lambda=0$. La famille est donc bien libre.

   Enfin $\exp=\text{ch}+\text{sh}$ donc la famille $(\text{ch},\text{sh},\exp)$ est liée.

   Donc $\dim H=2$.

Cor. 15.13 :

1. $(i;1+i)\neq(0;0)$ donc $\big((i;1+i)\big)$ est une famille libre.

   Or $(-1;-1+i)=i(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(-1;-1+i)$ sont colinéaires.

   De même, $(2-i;1-3i)=(-1-2i)(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(2-i;1-3i)$ sont colinéaires.

   Donc la famille $\mathcal{F}=\big((i;1+i);(-1;-1+i);(2-i;1-3i)\big)$ est de rang 1 dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

2. $(m-1;1)$ est non nul quel que soit la valeur de $m\in\mathbb{R}$. Donc la famille $\big((m-1;1)\big)$ est libre.

   Cherchons si la famille $\mathcal{G}=\big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre : soit $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que

   $\lambda(m-1;1)+\mu(-2;m-4)=(0;0)$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{llcl}(m-1)\lambda & -2\mu & = & 0\\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{llcl} & \big[-2-(m-1)(m-4)\big]\mu & = & 0\\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0\end{array}\right.\quad L_1\leftarrow L_1-(m-1)L_2$$
$$\iff\left\{\begin{array}{llcl} & \big[-m^2+5m-6\big]\mu & = & 0\\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0\end{array}\right.$$

   On en déduit que :

   - si $-m^2+5m-6=0$, c'est-à-dire si $m\in\{2;3\}$, la famille $\mathcal{G}=\big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est liée donc $\text{rg}\,\mathcal{G}=1$;
   - sinon, c'est-à-dire si $m\neq2$ et $m\neq3$, la famille $\mathcal{G}=\big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre donc $\text{rg}\,\mathcal{G}=2$.